Das symmetrische Eigenwertproblem

Johannes Erath

Schriftliche Ausarbeitung zum Vortrag vom 01.06.2010

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

Die numerische Lösung des symmetrischen Eigenwertproblems

$$Ax = \lambda x, A^T = A, \lambda \text{ Eigenwert von A}, x \neq 0 \text{ \& Eigenvektor von A}$$

ist aufgrund einiger besonderer Eigenschaften symmetrischer Matrizen (bspw. Schur-Zerlegung) deutlich günstiger, als bei beliebigen Matrizen. Zuallererst wird man sich jedoch fragen, warum man denn nicht, wie meist in der Linearen Algebra üblich, die Nullstellen des charakteristischen Polynoms bestimmt. Doch dieses Verfahren ist äußerst schlecht konditioniert, hierzu ein Beispiel:

1.0.1 Beispiel zur Nullstellenberechnung

Sei $\chi_A(z)$ das charakteristische Polynom einer symmetrischen Matrix $A \in \mathbb{R}^{20x20}$ mit:

$$\chi_A(z) = (z-20)(z-19)\dots(z-1) = z^{20} - 210z^{19} + \dots + 20!$$

Ist der Vorfaktor von z^{19} nun geringfügig gestört um $+2^{-23}$, so exisistieren bereits jetzt nicht mehr nur reelle Nullstellen.

Doch zuerst einige grundlegenden Eigenschaften symmetrischer Matrizen.

2 Zur Erinnnerung

2.1 Definition

Eine Matrix $Q \in \mathbb{R}^{nxn}$ heißt orthogonal, wenn gilt
Q ist invertierbar und $Q^T = Q^{-1}$
Diese Bedingung ist äquivalent zu folgenden Aussagen:

- $Q^TQ = QQ^T = I$ das heißt die Spalten- und Zeilenvektoren sind paarweise orthonormal zueinander
- $\|Qx\|_2 = \|x\|_2$ Damit folgt auch, dass orthogonale Äquivalenztransformationen normerhaltend sind, was wiederrum zur Folge hat, dass diese auch numerisch stabil sind.

2.2 Definition

Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ heißt symmetrisch, wenn $A = A^T$

2.3 Bemerkung

Für ^{T} gelten folgende Rechenregeln:
Seien hierzu A, B beliebige reelle Matrizen, $c \in \mathbb{R}$, so gilt:

- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $(cA)^T = cA^T$
- $(A^T)^T = A$
- $(AB)^T = B^TA^T$
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

2.4 Definition

Die natürlich Matrizennorm ist definiert durch:

$$\|A\| := \sup_{x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1, x \in \mathbb{K}^n} \|Ax\|$$

2.5 Bemerkung

Orthogonale Äquivalenztransformationen sind strukturerhaltend. *Beweis* Sei $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ eine symmetrische Matrix, $B \in \mathbb{C}^{nxn}$ eine zu A ähnliche Matrix und existiere eine orthogonale Matrix Q, so dass gilt

$$B = Q^TAQ$$

Dann folgt:

$$B^T = (T^TAT)^T = T^TA^T(T^T)^T = T^TAT = B$$

Also folgt aus $A^T = A \Rightarrow B^T = B$

3 Eigenschaften symmetrischer Matrizen

3.1 Reelle Eigenwerte

Symmetrische Matrizen besitzen ausschließlich reelle Eigenwerte.
Beweis: Der Einfachheit halber zeigen wir dies sogar für hermitesche Matrizen $A \in \mathbb{C}^{nxn}$. Sei hierzu λ Eigenwert von A mit zugehörigem Eigenvektor x. Dann folgt:

$$\lambda x^H x = x^H \lambda x = x^H A x = x^H A^H x = (Ax)^H x = (\lambda x)^H x = x^H \overline{\lambda} x$$

Also ist λ reell.

3.2 Symmetrische Schur-Zerlegung

Sei $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ symmetrisch, dann existiert eine orthogonale Matrix Q, so dass gilt:

$$Q^T A Q = \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

Beweis: Durch vollständige Induktion.

Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist dies offensichtlich, betrachte: $Ax = \lambda x$ wobei $A \in \mathbb{R}^{1x1}$
Induktionsbehauptung: Die Behauptung gelte für alle symmetrischen $A \in \mathbb{R}^{(n-1)x(n-1)}$
Induktionsschritt: z.Z.: Die Behauptung gilt auch für alle symmetrischen $A \in \mathbb{R}^{nxn}$
Sei λ_1 ein (reeller!) Eigenwert von A und sei $x \in \mathbb{R}^n$ ein Einheitsvektor bzgl der 2-Norm[1], so dass gilt $Ax = \lambda_1 x$. Wählen wir nun eine Householder-Matrix $P_1 \in \mathbb{R}^{nxn}$ mit $P_1^T x = e_1$, dann folgt:

$$P_1^T A P_1 e_1 = P_1^T A x = P_1^T \lambda x = \lambda P_1^T x = \lambda e_1$$

. Nun sind aber orthogonale Äquivalenztransformationen strukturerhaltend:

$$\Rightarrow P_1^T A P_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & A_{n-1} \end{bmatrix}$$

mit $A_{n-1} \in \mathbb{R}^{(n-1)x(n-1)}$. Nach Induktionsvorraussetzung gibt es nun eine orthogonale Matrix $Q_{n-1} \in \mathbb{R}^{(n-1)x(n-1)}$, so dass gilt:

$$Q_{n-1}^T A_1 Q_{n-1} = \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Definiert man nun $Q := P_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_{n-1} \end{bmatrix}$, so ist Q eine orthogonale nxn-Matrix und es gilt:

$$Q^T A Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_{n-1}^T \end{bmatrix} P_1^T A P_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_{n-1} \end{bmatrix}$$

[1]Die 2-Norm für Vektoren ist folgendermaßen definiert: $\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=0}^n |x_i|^2}$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_{n-1}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & A_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Damit folgt auch, dass jede symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ n linear unabhängige, zueinander orthogonale Eigenvektoren besitzt (da Householder-Matrizen orthogonal sind).

4 Kondition des symmetrischen Eigenwertproblems

Es ist bereits bekannt, dass die Lösung des Eigenwertproblems über die Nullstellen des charakteristischen Polynoms schlecht konditioniert ist. Doch kann es überhaupt eine bessere Lösung geben? Doch zuallererst wird folgender nützlicher Hilfssatz bewiesen.

4.1 Hilfssatz

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{nxn}$ beliebige Matrizen und $\|\cdot\|$ eine natürliche Matrizennorm. Dann gilt für jeden Eigenwert λ von A, der nicht zugleich auch Eigenwert von B ist, die Beziehung

$$\|(\lambda I - B)^{-1}(A - B)\| \geq 1$$

Beweis: Ist x Eigenvektor zum Eigenwert λ von A, so folgt aus der Identität:

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow Ax - Bx = \lambda I - Bx \Leftrightarrow (A - B)x = (\lambda I - B)x$$

Ist λ kein Eigenwert von B, so ist $(\lambda I - B)$ nichtsingulär, damit gilt:

$$(\lambda I - B)^{-1}(A - B)x = x$$

und damit:

$$1 \leq sup_{y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{\|(\lambda I - B)^{-1}(A - B)y\|}{\|y\|} = \|(\lambda I - B)^{-1}(A - B)\|$$

4.2 Satz von Gershgorin

Sei $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ und λ ein beliebiger Eigenwert von A. Dann gilt:

$$\lambda \in \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{K}_i = \bigcup_{i=1}^{n} \{z \in \mathbb{R} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}|\}$$

Damit nun zurück zum Beweis des Satzes von Gershgorin:

Beweis Sei λ ein Eigenwert von A, $D = \mathrm{diag}(a_{ii})$ und sei O.B.d.A. $\lambda \neq d_i \forall i = 1, \ldots, n$ Damit gilt:

$$1 \overset{\text{HS}}{\leq} \|(\lambda I - D)^{-1}(A - D)\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} \frac{1}{|\lambda - a_{ii}|} \sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}|$$

Damit lassen sich also nun sehr einfach Intervalle angeben, in welchen die Eigenwerte liegen.

4.3 Satz von Bauer und Fike

Sei $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ symmetrisch und $E \in \mathbb{R}^{nxn}$, sowie λ ein Eigenwert von $A + E$. Dann existiert ein Eigenwert $\hat{\lambda} \in \sigma(A)$ mit

$$|\lambda - \hat{\lambda}| \leq \|E\|_2$$

Beweis: Ist $\lambda \in \sigma(A)$ so folgt die Behauptung sofort.
Ist $\lambda \notin \sigma(A)$ und x der zu λ gehörige Eigenvektor, so gilt:

$$Ex = (A + E - A)x = (\lambda I - A)x$$

$$\Rightarrow (\lambda I - A)^{-1}Ex = x$$

Sei nun Q die nach dem Satz von Schur existierende, orthogonale Matrix, so dass: $Q^T AQ = \Lambda$.
Dann folgt mit Hilfe des Hilfssatzes (4.1.1):

$$1 \leq \|(\lambda I - A)^{-1}E\| = \|Q(\lambda I - \Lambda)^{-1})Q^T E\| \leq \|Q\|\|Q^T\|\|(\lambda I - \Lambda)^{-1}\|\|E\|$$

$$= \kappa(Q)\|E\| \max_{\hat{\lambda} \in \sigma(A)} |\lambda - \hat{\lambda}|^{-1} = 1\|E\| \max_{\hat{\lambda} \in \sigma(A)} |\lambda - \hat{\lambda}|^{-1}$$

$$\Rightarrow \text{Behauptung}$$

4.4 Satz von Wielandt-Hoffmann

Seien $A, E \in \mathbb{R}^{nxn}$ symmetrisch, $\hat{\lambda_1} \geq \ldots \geq \hat{\lambda_n}$ und $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$ die Eigenwerte von A bzw. $A + E$. Dann ist:

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \hat{\lambda}_i)^2 \leq \|E\|_F^2$$

Hierbei bezeichnet $\| \cdot \|_F$ die Frobeniusnorm.

Der Beweis hierzu ist sehr kompliziert und würde den Rahmen dieses Vortrags deutlich sprengen. Der Beweis hierzu findet sich im Buch von Wilkinson (1965), Seite 104-108.

5 Iterative Methoden

5.1 Potenz Methode

Gegeben sei eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ und ein bzgl. der 2-Norm normierter Vektor $q^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, dann lässt sich durch folgenden Algorithmus der betragsmäßig größte Eigenwert und der dazugehörige Eigenvektor iterativ bestimmen:

for k=1,2,... **do**
$z^{(k)} = Aq^{(k-1)}$
$q^{(k)} = z^{(k)}/\|z^{(k)}\|$
$\lambda^{(k)} = [q^{(k)}]^T Aq^{(k)}$
end for

Die sogar für andere diagonalisierbare Matrizen anwendbare Potenzmethode lässt sich auch auf symmetrische Matrizen anwenden. Seien hierzu die Eigenwerte betragsmäßig geordnet, also: $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$. Damit dieses Verfahren konvergiert muss λ_1 einfach und betragsmäßig einfach sein. Je besser λ_1 separiert ist, um so besser konvergiert dieses Verfahren. Im Vergleich zum allgemein gültigen Verfahren, welches eine Konvergenzgeschwindigkeit von $\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}^k$ hat, konvergiert dieses für symmetrische Matrizen sogar mit einer Konvergenzgeschwindigkeit von $\frac{|\lambda_1|}{|\lambda_2|}^{2k}$, wie im folgenden bewiesen wird.

5.1.1 Theorem

Sei $A \in \mathbb{R}^{nxn}$ symmetrisch und

$$Q^T AQ = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

wobei $Q = [q_1, \ldots, q_n]$ orthogonal sei und $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|$. Seien die Vektoren $q^{(k)}$ festgelegt durch obigen Algorithmus und $\theta_k \in [0, \pi/2]$ sei definiert durch

$$\cos(\theta_k) = |q_1^T q^{(k)}|$$

Ist $\cos(\theta_0) \neq 0$ so gilt

$$|\sin(\theta_k)| \geq \tan(\theta_0) \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{2k}$$

sowie

$$|\lambda^{(k)} - \lambda| \geq |\lambda_1 - \lambda_n| \tan(\theta_0)^2 \left|\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right|^{2k}$$

Beweis: Nach Definition des Algorithmus ist $q^{(k)}$ ein Vielfaches von $A^k q^{(0)}$ und daher gilt:

$$|\sin(\theta_k)|^2 = 1 - (q_1^T q^{(k)})^2 = 1 - \left(\frac{q_1^T A^k q^{(0)}}{\|A^k q^{(0)}\|_2}\right)$$

Nun lässt sich $q^{(0)}$ mit Hilfe der $q_1, \ldots, q_n$, die ja eine Basis bilden, darstellen, also

$$q^{(0)} = a_1 q_1 + \ldots + a_n q_n$$

Daraus folgt:

$$0 \neq \cos(\theta_0) = |q_1^T q^{(0)}| = |q_1^T a_1 q_1 + \ldots + q_1^T a_n q_n| \overset{\text{da } q_i \text{ orthonormal zueinander}}{=} |a_1|$$

sowie auch:

$$1 = |(q^{(0)})^T q^{(0)}| = |(a_1 q_1 + \ldots + a_n q_n)^T a_1 q_1 + \ldots + a_n q_n| = a_1^2 + \ldots a_n^2$$

und:

$A^k q^{(0)} = a_1 \lambda_1^k q_1 + a_2 \lambda_2^k q_2 + \ldots + a_n \lambda_n^k q_n$, da die $q_1, \ldots, q_n$ die Eigenvektoren von A sind.

Damit gilt nun:

$$|\sin(\theta_k)|^2 = 1 - \left(\frac{q_1^T A^k q^{(0)}}{\|A^k q^0\|_2}\right) = 1 - \frac{\left(q_1^T \sum_{i=1}^n a_i \lambda_i^k q_i\right)^2}{\left(\left\|\sum_{i=1}^n a_i \lambda_i^k q_i\right\|_2\right)^2} = 1 - \frac{a_1^2 \lambda_1^{2k}}{\sum_{i=1}^n a_i^2 \lambda_i^{2k}}$$

$$= \frac{\sum_{i=2}^n a_i^2 \lambda_i^{2k}}{\sum_{i=1}^n a_i^2 \lambda_i^{2k}} \leq \frac{\sum_{i=2}^n a_i^2 \lambda_i^{2k}}{a_1^2 \lambda_1^{2k}} = \frac{1}{a_1^2} \sum_{i=2}^n a_i^2 \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{2k} \ (*)$$

$$\leq \frac{1}{a_1^2} \left(\sum_{i=2}^n a_i^2\right) \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2k} = \frac{1 - a_1^2}{a_1^2} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2k}$$

Da $\tan(\theta_0) = \frac{\sqrt{1-\cos(\theta_0)^2}}{\cos(\theta_0)}$ folgt:

$$\frac{1 - a_1^2}{a_1^2} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2k} = \tan(\theta_0)^2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2k}$$

Betrachten wir nun $\lambda^{(k)}$:

$$\lambda^{(k)} = [q^{(k)}]^T A q^{(k)} = \frac{[A^k q^{(0)}]^T A^{k+1} q^{(0)}}{[A^k q^{(0)}]^T A^k q^{(0)}} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i^2 \lambda_i^{2k+1}}{\sum_{i=1}^n a_i^2 \lambda_i^{2k}}$$

und somit:

$$|\lambda^{(k)} - \lambda_1| = \left|\frac{\sum_{i=1}^n a_i^2 \lambda_i^{2k+1}}{\sum_{i=1}^n a_i^2 \lambda_i^{2k}} - \frac{\sum_{i=1}^n a_i^2 \lambda_i^{2k} \lambda_1}{\sum_{i=1}^n a_i^2 \lambda_i^{2k}}\right| = \left|\frac{\sum_{i=2}^n a_i^2 \lambda_i^{2k} (\lambda_i - \lambda_1)}{\sum_{i=1}^n a_i^2 \lambda_i^{2k}}\right|$$

$$\overset{wg.(*)}{\leq} |\lambda_1 - \lambda_n| \frac{1}{a_1^2} \sum_{i=2}^n a_i^2 \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^{2k} \leq |\lambda_1 - \lambda_n| \tan(\theta_0)^2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{2k}$$

Probleme können bei diesem Algorithmus theoretisch bei einer ungünstigen Wahl von $q^{(0)}$ auftreten, denn wählt man $q^{(0)}$ orthogonal zu x_1, also dem zu λ_1 gehörigen Eigenvektor, so ergibt $z^{(k)}$ k endlich null. Dies ist aber nur von theoretischer Bedeutung, in der Praxis konvergiert dieses Verfahren auf Grund von Rundungsfehlern trotzdem.

5.2 Inverse Iteration

Durch eine einfache Modifizierung der Potenz-Methode kommt man auf die Inverse Iteration. Ein störendes Merkmal der Potenzmethode ist, dass sich hierbei nur der betragsmäßig größte Eigenwert berechnen lässt. Berechnet man nun aber A^{-1} und wendet darauf die Potenzmethode an, so bekommt man $\frac{1}{\lambda_n}$ wobei λ_n der betragsmäßig kleinste Eigenwert von A ist. Durch Verschiebung der Eigenwerte der Matrix A um einen Schätzwert λ für einen Eigenwert von A, also $A - \lambda I$ kann man nun des Weiteren alle Eigenwerte berechnen, wenn für den zu berechnenden Eigenwert λ_i gilt:

$$\frac{1}{|\lambda_i - \lambda|} \ll \frac{1}{|\lambda_j - \lambda|} \qquad \text{mit } j = 1, \ldots, n, j \neq i$$

Demzufolge lautet der Algorithmus:

for k=1,2,... **do**
$z^{(k)} = (A - \lambda I)^{-1} q^{(k-1)}$
$q^{(k)} = z^{(k)} / \|z^{(k)}\|$
$\lambda^{(k)} = [q^{(k)}]^T (A - \lambda I)^{-1} q^{(k)}$
end for

5.3 Rayleigh Quotient Iteration

Diese Iterationsmethode baut auf der Inversen Iteration auf. Und zwar wird hier einfach der Rayleigh Quotient $\lambda = r(x) := \frac{x^T A x}{x^T x}$ als shift-Operator verwendet. Für den Rayleigh-Quotienten gilt:

5.3.1 Bemerkung

Der kleinste (größte) Eigenwert $\lambda_{\min}$ ($\lambda_{\max}$) einer reellen, symmetrischen Matrix A ist das Minimum (Maximum) des Rayleigh-Quotienten $r(x)$.
Dieses Minimum (Maximum) nimmt der Rayleigh-Quotient für jeden zum kleinsten (größten) Eigenwert gehörigen Eigenvektor $x_{\min}$ (x_{max}) an, für alle reellen, symmetrischen Vektoren x gilt:

$$\lambda_{\min} = r(x_{\min}) \leq r(x) \leq r(x_{\max}) = \lambda_{\max}$$

Der Beweis hierzu ist offensichtlich, sobald x als Linearkombination der Eigenvektoren und Ax über die Eigenvektoren und Eigenwerte dargestellt wird.

Daher ist der Rayleigh-Quotient eine besonders gute Näherung zum Eigenwert. Daraus folgt der Algorithmus:

$q^{(0)}$ gegeben, mit $\|q^{(0)}\|_2 = 1$
$\mu^{(k)} = r(q^{(k)})$
repeat
if $A - \mu^{(k)} I$ singulär **then**
Löse $(A - \mu^{(k)} I) q^{(k+1)} = 0, \|q^{(k+1)}\|_2 = 1$ nach $q^{(k+1)}$

stop

else

$z^{(k+1)} = (A - \mu^{(k)} I)^{-1} q^{(k)}$

$q^{(k+1)} = z^{(k+1)} / \|z^{(k+1)}\|_2$

end if

until stop

Natürlich ist der zusätzliche Aufwand, jedes Mal eine Matrix zu invertieren sehr groß. Daher lohnt sich diese Methode nur dann, wenn die symmetrische Matrix bereits auf Tridiagonalform gebracht wurde, dass heißt abgesehen von der Haupt- und deren Nebendiagonalen sind nur Nullen in der Matrix enthalten.

5.4 Orthogonale Iteration

Eine Verallgemeinerung der Potenzmethode zur gleichzeitigen Berechnung mehrerer Eigenwerte ist die orthogonale Iteration. Sei $r \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq r \leq n$ und Q_0 eine gegebene nxr Matrix mit orthonormalen Spalten, so können durch folgenden Algorithmus r Eigenwerte näherungsweise bestimmt werden:

for $k = 1, 2, \ldots$ **do**

$Z_k = AQ_{k-1}$

$Q_k R_k = Z_k$

end for

Aufgrund der besseren Konvergenzgeschwindigkeit von symmetrischen Matrizen bei der Potenzmethode, wird auch hier eine bessere Konvergenz als im allgemeinen Fall erreicht. Dies gilt auch für die nun folgenden QR-Iteration.

5.5 QR-Iteration

Betrachtet man nun die orthogonale Iterationsmethode und sei $r = n$, so ergibt sich die QR-Iteration.

for $k = 1, 2, \ldots$ **do**

$Z_k = AQ_{k-1}$

$Q_k R_k = Z_k$

end for

Die QR-Iteration ist auf diese Weise allerdings noch nicht sonderlich effizient, kann allerdings beispielsweise schon allein dadurch verbessert werden, in dem man Q_0 zuerst auf Tridiagonalform bringt.

6 Quellen

- Gene H. Golub/ Charles F. Van Loan: Matrix Computations, The Johns Hopkins University Press, Dritte Auflage, Baltimore, 1996, ISBN 0-8018-5414-8
- Parlett, Beresford N: The symmetric eigenvalue problem, SIAM, Philadelphia, 1998, ISBN 0-89871-402-8
- Hanke-Bourgois, Martin: Grundlagen der Numerischen Mathematik und des Wissenschaftlichen Rechnens, Zweite überarbeitete und erweiterte Auflage Wiesbaden: B.G. Teubner Verlag, 2006, ISBN 3-8351-0090-4
- Rannacher, Rolf: Einführung in die Numerische Mathematik - Numerik 0, Vorlesungsskript SS 2005
- Stoer, Josef/ Bulirsch, Roland: Numerische Mathematik 2, Vierte, neu bearbeitete und erweiterte Auflage, Springer Verlag, Heidelberg, 2000, ISBN 3-540-67644-9
- Wilkinson, J.H.: The algebraic eigenvalue problem, Oxford University Press, Oxford, 1965, ISBN 0-19-853418-3
- https://lp.uni-goettingen.de