Lineare Iterationsverfahren für M-Matrizen

Simon Renner

22.06.2010

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **3**

2 M-Matrizen **3**
2.1 Vorbemerkungen der linearen Algebra 3
2.2 Kriterien für M-Matrizen 5

3 Reguläre Aufspaltungen **8**

4 Anwendungen **10**
4.1 Blockweise Iterationsverfahren 10
4.2 Konvergenz für M-Matrizen 11

1 Einleitung

Zur Lösung der Gleichung $A \cdot x = b$ können entweder direkte oder iterative Verfahren verwendet werden. In direkten Verfahren wird die Gleichung in endlich vielen Schritten bis auf Rundungsfehler exakt gelöst. Ein iteratives Verfahren generiert in jedem Schritt ein neues x , das mit jedem Schritt näher an die exakte Lösung heranrückt. Wie viele Schritte für eine bestimmte Genauigkeit benötigt werden ist u.a ein Maßstab für die Qualität des Verfahrens. Ist die Matrix A sehr groß und dünn besetzt, so sind iterative Verfahren aufgrund des geringeren Rechen- und Speicheraufwandes die bessere Wahl.

Wird die Matrix A in $D + L + R$ mit $D = \operatorname{diag}(a_{\alpha\beta}), R = (a_{\alpha\beta})\ \alpha < \beta, L = (a_{\alpha\beta})\ \alpha > \beta$ aufgespalten, so entsteht im Falle D regulär folgendes Iterationsverfahren:

$$x^t = -D^{-1}(L + R)x^{t-1} + D^{-1}b$$

Dies ist das sog. Jacobi Verfahren. Ein weiteres wichtiges Verfahren ist das Gauß-Seidel Verfahren:

$$x^t = -(D + L)^{-1}Rx^{t-1} + (D + L)^{-1}b$$

Es stellt sich nun die Frage, wann ein solches Verfahren konvergiert. Eine Antwort hierauf liefert der folgende Satz.

Satz 1. *Die durch*

$$x^t = Bx^{t-1} + b$$

erzeugten Iterierten $x^t \in \mathbb{R}, t = 1, 2...$ konvergieren genau dann für jeden Startwert x^0 gegen die Lösung $x \in \mathbb{R}$ der Fixpunktgleichung, wenn

$$\rho(B) < 1$$

$\rho(B)$ bezeichnet den Spektralradius der Matrix.

Die Eigenschaften der Iterationsmatrix B hängen offensichtlich von der Ausgangsmatrix A ab. Wir wollen nun die Eigenschaften solcher Verfahren bei der Anwendung auf M-Matrizen untersuchen.

2 M-Matrizen

2.1 Vorbemerkungen der linearen Algebra

Zunächst einige Hilfssätze und Definitionen, die in den nächsten Kapiteln benötigt werden:

Hilfssatz 1. *Für eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{I \times I}$ gilt, falls $A \geq 0$:*

1. $\rho(A) \in \sigma(A)$
2. $\lambda = \rho(A)$ *hat einen positiven Eigenvektor* x
3. $\rho(B) \geq \rho(A)$ *für alle* $B \geq A$

Man beachte, dass die Ordnungsrelation $\geq$ für jedes Element definiert ist: $A \geq B \Leftrightarrow a_{\alpha\beta} \geq b_{\alpha\beta}$ für alle $\alpha, \beta \in I$.

Hilfssatz 2. *Für eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{I \times I}, A \geq 0$ gilt:*

$$\rho(A) < 1 \Leftrightarrow \sum_{\nu=0}^{\infty} A^{\nu} = (1-A)^{-1}$$

Definition 1. *Sei $A \in \mathbb{K}^{I \times I}$ eine Matrix. Als Graph $G(A)$ der Matrix wird folgende Menge bezeichnet:*

$$G(A) = \{(\alpha, \beta) \in I \times I : a_{\alpha\beta} \neq 0\}$$

Definition 2. *Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{I \times I}$ heißt irreduzibel, wenn in $G(A)$ jedes $\alpha \in I$ mit jedem $\beta \in I$ verbunden ist. Andernfalls heißt sie reduzibel.*

Diese Formulierung ist sehr nützlich, da sie am Rechner leicht überprüft werden kann. Eine andere Formulierung der Irreduzibilität, die wir später noch brauchen werden, liefert die folgende Bemerkung:

Bemerkung 1. *Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{I \times I}$ ist genau dann reduzibel, wenn man die Indizes so anordnen kann, dass A die Blockgestalt*

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

wobei A_{11}, A_{22} nichtleere quadratische Blöcke sind.

Definition 3. *Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{I \times I}$ heißt stark diagonaldominant, wenn:*

$$|a_{\alpha\alpha}| > \sum_{\substack{\beta \in I \\ \beta \neq \alpha}} \left|a_{\alpha\beta}\right| \forall \alpha \in I$$

Definition 4. *Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{I \times I}$ heißt schwach diagonaldominant, wenn:*

$$|a_{\alpha\alpha}| \geq \sum_{\substack{\beta \in I \\ \beta \neq \alpha}} \left|a_{\alpha\beta}\right| \forall \alpha \in I$$

Definition 5. *Eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{I \times I}$ heißt irreduzibel diagonaldominant, falls A irreduzibel, schwach diagonaldominant ist und außerdem gilt:*

$$|a_{\alpha\alpha}| > \sum_{\substack{\beta \in I \\ \beta \neq \alpha}} \left|a_{\alpha\beta}\right| \textit{für mindestens ein} \alpha \in I$$

Definition 6. *Sei $A \in \mathbb{K}^{I \times I}$ eine Matrix und für $\gamma \in I$ sei*
$G_\gamma := \{\beta \in I : \gamma$ mit β im Matrixgraphen $G(A)$ verbunden$\}$. A heißt im wesentlichen diagonaldominant, wenn A schwach diagonaldominant ist und für alle $\gamma \in I$ gilt:

$$|a_{\alpha\alpha}| > \sum_{\substack{\beta \in I \\ \beta \neq \alpha}} \left|a_{\alpha\beta}\right| \textit{für mindestens ein } \alpha \in G_\gamma$$

Hilfssatz 3. *Für eine Matrix $B \in \mathbb{K}^{I \times I}$ gilt, falls $|B| \leq A \in \mathbb{K}^{I \times I}$:*

$$\rho(B) \leq \rho(A)$$

Hilfssatz 4. *Für eine Matrix $A \in \mathbb{K}^{I \times I}$ gelten die Implikationen:*

stark diagonaldominant $\Rightarrow$ irreduzibel diagonaldominant $\Rightarrow$ im wesentlichen diagonaldominant

2.2 Kriterien für M-Matrizen

Definition 7. *Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{I\times I}$ heißt M-Matrix, falls*

1. $a_{\alpha\alpha} > 0$ *für alle* $\alpha \in I$
2. $a_{\alpha\beta} \leq 0$ *für alle* $\alpha \neq \beta$
3. *A regulär und* $A^{-1} \geq 0$

Die ersten zwei Kriterien dieser Definition sind leicht nach zu prüfen. Da Matrizeninversion jedoch ein numerisch recht aufwändiger Prozess ist, werden wir nach anderen Kriterien suchen, um die Regularität von A und Positivität von A^{-1} fest zu stellen. Einen ersten Schritt in diese Richtung tut der folgende Satz.

Satz 2. *$A \in \mathbb{R}^{I\times I}$ erfülle: $a_{\alpha\beta} \leq 0$ für alle $\alpha \neq \beta$. $D =$ diag$(a_{\alpha\alpha} : \alpha \in I)$ bezeichne die Diagonale von A. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *A regulär und* $A^{-1} \geq 0$
2. $a_{\alpha\alpha} > 0,\ M := 1 - D^{-1}A \geq 0,\ \rho(M) < 1$

Im Fall 1 oder 2 ist A eine M-Matrix. Umgekehrt gilt für jede M-Matrix Aussage 2.

Beweis. $\Rightarrow$:
$a_{\alpha\alpha} > 0$: Sei s^γ die $\gamma \in I$ entsprechende Spalte von A. Da $A^{-1}A = 1$

$$\Rightarrow A^{-1}s^\gamma = e^\gamma (\textit{Einheitsvektor})$$

Da $a_{\alpha\beta} \leq 0$ ist, gilt, falls $a_{\alpha\alpha} \leq 0 : a^\gamma \leq 0$

$$\Rightarrow A^{-1}a^\gamma \leq 0 \Rightarrow e^\gamma \leq 0 \lightning$$

$$\Rightarrow a_{\alpha\alpha} > 0$$

$M = 1 - D^{-1}A \geq 0$: Da $a_{\alpha\alpha} > 0 \Rightarrow D \geq 0$ und regulär.

$$\Rightarrow A' := D^{-1}A \Rightarrow A'^{-1} = A^{-1}D \geq 0$$

$M = 1 - A'$ hat die Diagonaleinträge $M_{\alpha\alpha} = 1 - 1 = 0$. Die restlichen Einträge sind $M_{\alpha\beta} = 0 - a_{\alpha\alpha}^{-1}a_{\alpha\beta} \geq 0$

$$\Rightarrow M \geq 0$$

$\rho(M) < 1$: Nach Hilfssatz 1 existiert zu $\lambda := \rho(M)$ ein positiver Eigenvektor $x \geq 0$:

$$Mx = \lambda x \Leftrightarrow (1 - A^{-1}D)x = A^{-1}D\lambda x$$

$$\Leftrightarrow (A^{-1}D - A^{-1}D\lambda)x = x$$

$$\Leftrightarrow A'^{-1}(1-\lambda)x = x$$

Da sowohl $A'^{-1} \geq 0$ als auch $x \geq 0$gilt:

$$1 - \lambda \geq 0 \Rightarrow 0 \leq \rho(M) = \lambda < 1$$

$\Leftarrow$:
Aus Hilfssatz 2 folgt

$$(1-M)^{-1} \geq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq (1-M)^{-1}D^{-1} = (D^{-1}A)^{-1}D^{-1} = A^{-1}DD^{-1} = A^{-1}$$

□

Man kann den Satz sogar noch ein wenig verschärfen:

Satz 3. *Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{I\times I}$ gelte: $a_{\alpha\beta} \leq 0$ für alle $\alpha \neq \beta$. D bezeichne die Diagonale der Matrix, $M := 1 - D^{-1}A$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1. *A regulär und $A^{-1} > 0$*
2. *$a_{\alpha\alpha} > 0,\ M \geq 0,\ \rho(M) < 1,\ M$ irreduzibel*

Beweis. $\Rightarrow$:
Wäre A reduzibel, so gäbe es eine Blockstruktur wie in Bemerkung 1:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$$

Wobei die inverse Matrix $C := A^{-1}$ folgende Struktur hätte:

$$C = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{pmatrix}$$

wobei $C_{21} = 0$, was im Widerspruch steht zu $A^{-1} > 0$. Also ist A irreduzibel. Da sich M und A nur auf ihrer Diagonalen unterscheiden gilt: $G(A) = G(M)$, somit ist auch M irreduzibel.
$\Leftarrow$:
Aus dem Beweis von Satz 2 entnehmen wir:

$$A^{-1} = (\sum_{\nu=0}^{\infty} M^{\nu})D^{-1}$$

Da $\sum_{\nu=0}^{\infty} M^{\nu}$ und $D^{-1} > 0 \Rightarrow A^{-1} > 0$ □

Satz 4. *Die Matrix $A \in \mathbb{K}^{I\times I}$ sei stark diagonaldominant, im wesentlichen diagonaldominant oder irreduzibel diagonaldominant. Dann gilt:*

$$\rho(M) < 1$$

für die Jacobi Iterationsmatrix $M := 1 - D^{-1}A$, wobei D die Diagonale von A ist. Gilt außerdem $a_{\alpha\alpha} > 0$ und $a_{\alpha\beta} \leq 0\ \forall \alpha \neq \beta$, so ist A eine M-Matrix.

Beweis. Für stark diagonaldominante Matrizen ist D offensichtlich regulär. Dies gilt auch für irreduzibel diagonaldominante Matrizen, da in jeder Spalte ein Eintrag außerhalb der Diagonale ungleich 0 ist. Bei im wesentlichen diagonaldominanten Matrizen lässt sich für jedes $a_{\alpha\alpha}$ ein $\beta \in G_{\gamma}$ finden, sodass auch hier D regulär ist.
Wir definieren nun eine neue Matrix $M' := |M|$ mit den Elementen $M'_{\alpha\alpha} = 0$ für alle $\alpha = \beta$ und $M'_{\alpha\beta} = |a_{\alpha\beta}/a_{\alpha\alpha}|$ für $\alpha \neq \beta$. Nach Hilfssatz 3 gilt $\rho(M) \leq \rho(M')$ weshalb es reicht $\rho(M') < 1$ zu zeigen.
Da $M' \geq 0 \Rightarrow \lambda := \rho(M') \in \sigma(M')$ und es gibt einen zugehörigen positiven normierten Eigenvektor $x : \|x\|_{\infty} = 1$.
Sei α ein Index mit $x_{\alpha} = 1$

$$\Rightarrow \lambda = \lambda x_{\alpha} = (M'x)_{\alpha}$$

$$= \left(\sum_{\beta \neq \alpha} |a_{\alpha\beta}| x_\beta \right) / |a_{\alpha\alpha}| \leq \left(\sum_{\beta \neq \alpha} |a_{\alpha\beta}| \right) / |a_{\alpha\alpha}| \leq 1$$

Hier wurde benutzt, dass $M'_{\alpha\alpha} = 0$ um die Summe zu reduzieren, $||x||_\infty = 1$ schafft die erste Umgleichung, die schwache Diagonaldominanz die zweite.
Falls $\lambda < 1 \Rightarrow \rho(M') < 1$.
Falls $\lambda = 1 \Rightarrow x_\gamma = 1$ für alle $\gamma \in G_\alpha$
Da stark diagonaldominant $\Rightarrow$ irreduzibel diagonaldominant $\Rightarrow$ im wesentlichen diagonaldominant (Hilfssatz 4) gibt es einen Index $\gamma \in G_\alpha$ mit $|a_{\gamma\gamma} > \sum_{\beta \neq \gamma} |a_{\beta\gamma}|$, so dass wegen $x_\gamma = x_\beta = 1$ für $\gamma,\ \beta \in G_\alpha$ gilt:

$$\lambda = \lambda x_\gamma = \left(\sum_{\beta \neq \gamma} |a_{\gamma\beta}| x_\beta \right) / |a_{\gamma\gamma}| = \left(\sum_{\beta \neq \gamma} \right) / |a_{\gamma\gamma}| < 1$$

□

Wenden wir Satz 2 auf diesen Satz an, so erhalten wir:

Satz 5. *Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{I \times I}$ erfülle $a_{\alpha\alpha} > 0$ und $a_{\alpha\beta} \leq 0\ \forall\ \alpha \neq \beta$ und sei irreduzibel diagonaldominant. Dann ist A eine M-Matrix mit $A^{-1} > 0$.*

Wir haben nun also mehrere Kriterien, die am Rechner leicht zu überprüfen sind, gewonnen um fest zu stellen, ob eine gegebene Matrix A eine M-Matrix ist. Für einen späteren Beweis benötigen wir aber noch folgenden Hilfssatz.

Hilfssatz 5. *Sei $A \in \mathbb{R}^{I \times I}$ eine M-Matrix und für $B \in \mathbb{R}^{I \times I}$ gelte: $B \geq A$ sowie $b_{\alpha\beta} \leq 0$ für alle $\alpha \neq \beta$. Dann ist auch B eine M-Matrix und es gilt*

$$0 \leq B^{-1} \leq A^{-1}$$

Beweis. Da $B \geq A$ gilt $b_{\alpha\alpha} \geq a_{\alpha\alpha}$ für alle $\alpha \in I$. Somit sind die Elemente der Inversen Diagonalmatrix von B $1/b_{\alpha\alpha} \leq 1/a_{\alpha\alpha}$. Es gilt also

$$0 \leq D_B^{-1} \leq D^{-1}$$

sowie, da $M_{\alpha\alpha} = 0$

$$0 \leq M_B \leq M$$

Da $\rho(A) < 1$ gilt nach Hilfssatz 2

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} M^\nu = (1 - M)^{-1}$$

Da M_B durch M majorisiert wird, gilt:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} M_B^\nu \text{ konvergiert}$$

und erneute Anwendung von Hilfssatz 2 ergibt

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} M_B^\nu = (1 - M_B)^{-1} \Leftrightarrow \rho(M_B) < 1$$

□

3 Reguläre Aufspaltungen

Die Aufspaltung $A = W - R$ einer Matrix induziert das Iterationsverfahren $Wx^{t+1} = Rx^t + b$ falls W regulär ist.

Definition 8. *Die Matrix $W \in \mathbb{R}^{I \times I}$ beschreibt eine reguläre Aufspaltung von $A \in \mathbb{R}^{I \times I}$, falls*

$$W \textit{ regulär},\ W^{-1} \geq 0,\ W \geq A$$

Die Iterationsmatrix des induzierten Iterationsverfahrens ist $M = W^{-1}R$, zudem wird durch die Definition impliziert: $M \geq 0$ für reguläre Aufspaltungen. Mit Hilfe dieser Bedingung lässt sich die Definition etwas abschwächen:

Definition 9. *Die Matrix $W \in \mathbb{R}^{I \times I}$ beschreibt eine schwach reguläre Aufspaltung von $A \in \mathbb{R}^{I \times I}$, falls*

$$W \textit{ regulär},\ W^{-1} \geq 0,\ M = W^{-1}R \geq 0$$

Die Konvergenzeigenschaften eines solchen induzierten Iterationsverfahrens für M-Matrizen werden im folgenden Satz deutlich.

Satz 6. *Die Matrix $A \in \mathbb{R}^{I \times I}$ sei eine M-Matrix. W beschreibe eine schwach reguläre Aufspaltung von A. Dann konvergiert das induzierte Iterationsverfahren und es gilt:*

$$\rho(M) = \rho(W^{-1}R) = \frac{\rho(A^{-1}R)}{1 + \rho(A^{-1}R)} < 1$$

Beweis. Mit $C := A^{-1}R$ reicht es, die Gleichheit für $\rho(W^{-1}R) = \rho(C)/(1 + \rho(C))$ zu zeigen. Da $M \geq 0$ gilt:

$$\begin{aligned} 0 &\leq M = W^{-1}R \\ \Leftrightarrow [A^{-1}W]^{-1}A^{-1}WM &= [A^{-1}W]^{-1}A^{-1}R \\ &= [A^{-1}(A + R)]^{-1}A^{-1}R = [1 + C]^{-1}C \end{aligned}$$

Wir verwenden nun wieder Hilfssatz 1: Zu $\lambda = \rho(M) \in \sigma(M)$ gehört wegen $M \geq 0$ ein positiver Eigenvektor x.

$$\Rightarrow \lambda x = Mx = (1 + C)^{-1}Cx$$

$$\Leftrightarrow \lambda x + \lambda Cx = Cx$$

Angenommen $\lambda = 1 \Rightarrow x = 0$ ↯.

$$\Rightarrow Cx = \frac{\lambda}{1 - \lambda}x$$

Falls $C \geq 0 \Rightarrow \frac{\lambda}{1-\lambda} \geq 0$ also $0 \leq \lambda = \rho(M) < 1$. Daher zeigen wir nun, dass $C \geq 0$:
Da $M \geq 0$ und $W^{-1} \geq 0$ gilt

1. $0 \leq \left(\sum_{\nu=0}^{m-1} M^\nu\right) W^{-1}$
2. $W^{-1} = (1 - M)A^{-1} \leq A$
3. $\sum_{\nu=0}^{m-1} M^\nu(1 - M) = 1 - M^m$

Einsetzen von zwei in eins liefert:

$$0 \leq \left(\sum_{\nu=0}^{m-1} M^\nu \right) (1 - M) A^{-1}$$

Kombination mit der dritten Gleichung ergibt:

$$0 \leq (1 - M^m) A^{-1} \leq A^{-1} \Rightarrow 0 \leq M^m A^{-1} \leq A^{-1}$$

M ist also beschränkt $\Rightarrow \lambda = \rho(M) \leq 1$. Da $\lambda = 1$ jedoch zum Widerspruch führt, muss $\lambda = \rho(M) < 1$ gelten. Dies impliziert unter Verwendung von Hilfssatz 2:

$$\begin{aligned} C &= A^{-1} R = [W(1 - M)]^{-1} R \\ &= (1 - M)^{-1} W^{-1} R = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} M^\nu \right) M \geq 0 \end{aligned}$$

Nun zu $\rho(M) = \rho(C)/(1 - \rho(C))$:
Die Gleichung

$$Cx = \frac{\lambda}{1 - \lambda} x$$

bedeutet, dass

$$\lambda \text{ ist Eigenwert von } M \Leftrightarrow \mu = \frac{\lambda}{1 - \lambda} \text{ ist Eigenwert von } C$$

Da $\mu = \frac{\lambda}{1-\lambda}$ monoton mit λ wächst, ist $|\mu| = \mu$ maximal für $\lambda = \rho(M) \in \sigma(M)$. Da $C \geq 0$ liefert Hilfssatz 1, dass der größte Eigenwert gleich dem Spektralradius ist.

$$\Rightarrow \rho(C) = \frac{\rho(M)}{1 - \rho(m)}$$

$$\Leftrightarrow \rho(M) = \frac{\rho(C)}{1 + \rho(C)}$$

□

Der folgende Satz erlaubt einen Vergleich der Konvergenzgeschwindigkeiten zweier regulärer Aufspaltungen.

Satz 7. *Für die Matrix $A \in \mathbb{R}^{I \times I}$ gelte $A \geq 0$. Durch W_1 und W_2 seien zwei reguläre Aufspaltungen gegeben. Wenn W_1 und W_2 in der Form*

$$A \leq W_1 \leq W_2$$

vergleichbar sind, lassen sich auch die zugehörigen Konvergenzraten vergleichen:

$$0 \leq \rho(M_1) \leq \rho(M_2) < 1$$

wobei $M_i := W_i^{-1} R_i,\ R_i := W_i - A$

Beweis. Die Matrizen $B := A^{-1} R_1$ und $C := A^{-1} R_2$ erfüllen $0 \leq B \leq C$ und damit nach Hilfssatz 3: $0 \leq \rho(B) \leq \rho(C)$. Anwendung von Satz 6 liefert:

$$0 \leq \rho(M_1) = \frac{\rho(B)}{1 + \rho(B)} \leq \frac{\rho(C)}{1 + \rho(C)} = \rho(M_2) < 1$$

□

4 Anwendungen

4.1 Blockweise Iterationsverfahren

Sowohl das Jacobi- als auch das Gauß-Seidel-Verfahren können in einer Blockversion durchgeführt werden:

Definition 10. *Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{I \times I}$ sei eine Zerlegung der Indexmenge I in disjunkte, nichtleere Teilmengen gegeben: $I = \bigcup_{\kappa \in B} I_\kappa$, wobei B die Indexmenge der Blöcke ist. Mit D wird nun die Blockdiagonale der Matrix bezeichnet:*

$$D := blockdiag(A) = blockdiag(A^{\kappa\kappa} : \kappa \in B)$$

Dabei sind $A^{\kappa\kappa}$ die Diagonalblöcke der Matrix. Das blockweise Jacobi-Verfahren wird durch die Iteration mit

$$W := D, R := D - A$$

beschrieben.

Bemerkung 2. *Offenbar ist dieses Verfahren genau dann wohldefiniert, wenn D regulär ist, in diesem Fall also, wenn*

$$A^{\kappa\kappa} \text{ regulär für alle } \kappa \in B$$

Definition 11. *Für eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{I \times I}$ sei eine Zerlegung der Indexmenge I in disjunkte, nichtleere Teilmengen gegeben: $I = \bigcup_{\kappa \in B} I_\kappa$, wobei B die Indexmenge der Blöcke ist. Mit D wird nun die Blockdiagonale der Matrix bezeichnet:*

$$D := blockdiag(A) = blockdiag(A^{\kappa\kappa} : \kappa \in B)$$

Dabei sind $A^{\kappa\kappa}$ die Diagonalblöcke der Matrix. Mit $L := A^{\kappa\phi}$ für $\kappa > \phi$ wird eine strikte untere Blockdreiecksmatrix, mit $R' := A^{\kappa\phi}$ für $\kappa < \phi$ eine strikte obere Blockdreiecksmatrix definiert. Das blockweise Jacobi-Verfahren wird durch die Iteration mit

$$W := D - L, R := R'$$

beschrieben.

Bemerkung 3. *Auch dieses Verfahren ist genau dann wohldefiniert, wenn D regulär ist, denn dann ist auch*

$$D - L = A^{\kappa\phi} \text{ regulär für alle } \kappa \geq \phi$$

Da bei den blockweisen Verfahren in jedem Schritt Gleichungssysteme zu lösen sind, haben sie einen höheren Rechenaufwand (Faktor $1,4$). Wie wir im nächsten Kapitel sehen werden konvergieren sie jedoch schneller als die punktweisen Verfahren, da sich die Ausgangsmatrix A und die Aufspaltungsmatrix W weniger unterscheiden.

4.2 Konvergenz für M-Matrizen

Wir wollen nun die Konvergenzeigenschaften des Jacobi- und des Gauß-Seidel-Verfahrens für M-Matrizen untersuchen.

Satz 8. *Sei $A \in \mathbb{R}^{I \times I}$ eine M-Matrix. Dann konvergiert sowohl das punktweise als auch das blockweise Jacobi-Verfahren, wobei letzteres schneller konvergiert:*

$$\rho(M^{BlockJac}) \leq \rho(M^{Jac}) < 1$$

Ist D die Diagonale $D^p kt$ bzw. $D^b lock$ von A, so gilt:

$$D \text{ beschreibt eine reguläre Aufspaltung}$$

Beweis. Da A eine M-Matrix ist, gilt

$$D \geq 0$$

Nach Hilfssatz 5 ist D eine M-Matrix und somit $D^{-1} \geq 0$.Daraus folgt: D beschreibt eine reguläre Aufspaltung. Da $D^{pkt} \geq D^{block}$ folgt mit Satz 7

$$0 \leq \rho(M^{BlockJac}) \leq \rho(M^{Jac}) < 1$$

□

Satz 9. *Sei $A \in \mathbb{R}^{I \times I}$ eine M-Matrix. Dann konvergiert sowohl das punktweise als auch das blockweise Gauß-Seidel-Verfahren, wobei letzteres schneller konvergiert:*

$$\rho(M^{BlockGS}) \leq \rho(M^{GS}) < 1$$

Ist D die Diagonale D^{pkt} bzw. D^{block} von A und L die untere Dreiecks- bzw. Blockdreiecksmatrix, die Durch $A = D + L + R$ entsteht, so gilt:

$$D - L \text{ beschreibt eine reguläre Aufspaltung}$$

Beweis. Da A eine M-Matrix ist, gilt

$$D \geq 0$$

und $L \leq 0$. Nach Hilfssatz 5 ist $D - L$ eine M-Matrix und somit $(D - L)^{-1} \geq 0$.Daraus folgt: $D - L$ beschreibt eine reguläre Aufspaltung. Somit ist $D - L$ eine reguläre Aufspaltung. Da $(D - L)^{pkt} \geq (D - L)^{block}$ folgt mit Satz 7

$$0 \leq \rho(M^{BlockGS}) \leq \rho(M^{GS}) < 1$$

□

Nachdem nun die Konvergenz für block-und punktweise Jacobi- und Gauß-Seidel-Verfahren gezeigt ist, liefert der folgende Satz noch einen Vergleich der beiden Verfahren.

Satz 10. *Für eine M-Matrix $A \in \mathbb{R}^{I \times I}$ gilt:*

1. $\rho(M^{GS}) \leq \rho(M^{Jac}) < 1$
2. $\rho(M^{BlockGS}) \leq \rho(M^{BlockJac}) < 1$

Beweis. Für die beiden Aufspaltungen gilt im punktweisen wie im blockweisen Fall:

$$W^{GS} = D - L \leq D = W^{Jac}$$

Satz 8,9 (Konvergenz der Verfahren) und 7 (Ungleichung) liefern dann die Aussage des Satzes. □

Literatur

[1] Wolfgang Hackbusch, *Iterative Lösung großer schwachbesetzter Gleichungssysteme*, Teubner-Verlag, Stuttgart, 2. überarb. und erw. Aufl., 1994

[2] Rolf Rannacher, *Vorlesungsskriptum Einführung in die Numerische Mathematik*, 2006

[3] Richard S. Varga, *Matrix iterative Analysis*, Prentice-Hall-Verlag, Englewood Cliffs NJ, 1962