

# Geometrische Mehrgitterverfahren

Annabell Schlüter

13.07.2010

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Das Mehrgitterverfahren für lineare Probleme</b>	<b>3</b>
2.1	Dämpfungseigenschaften des Jacobiverfahrens . . . . .	3
2.2	Das Zweigitterverfahren . . . . .	5
2.3	Das Mehrgitterverfahren . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Das Mehrgitterverfahren für nicht-lineare Probleme</b>	<b>9</b>
<b>4</b>	<b>Das vollständige Mehrgitterverfahren</b>	<b>11</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

Um Gleichungssysteme mit iterativen Verfahren zu lösen, ist eine Diskretisierung des Problems nötig. Je feiner diese Diskretisierung ist, desto geringer ist der Informationsverlust und desto genauer die genäherte Lösung. Allerdings steigt der Rechenaufwand mit der Anzahl der Diskretisierungspunkte.

Beim Mehrgitterverfahren werden Gitter (Diskretisierungen) unterschiedlicher Schrittweiten verwendet. Mit Hilfe eines Vorglätters, z.B. der Jacobiiteration oder dem Gauss-Seidel Verfahren, wird zunächst auf einem feinen Gitter eine Näherungslösung berechnet. Deren Fehler ist glatt genug, um ihn ohne großen Informationsverlust auf einem gröberem Gitter als Lösung eines Gleichungssystems darzustellen. Die Lösung dieses Grobgitterproblems wird zurück auf das feine Gitter interpoliert um die ursprüngliche Näherungslösung zu verbessern.

Wir werden exemplarisch die Glättungseigenschaften des Jacobiverfahrens untersuchen und uns detaillierter mit dem Mehrgitterverfahren beschäftigen.

# Kapitel 2

## Das Mehrgitterverfahren für lineare Probleme

### 2.1 Dämpfungseigenschaften des Jacobiverfahrens

Zu lösen sei ein Gleichungssystem  $Au = f$ .

Ein allgemeines Iterationsverfahren zur Lösung solcher Probleme hat die Form

$$u^{(\nu+1)} = Mu^{(\nu)} + Nf. \quad (2.1)$$

Hier sind die Matrizen  $M$  und  $N$  so zu wählen, dass die Folge  $u^{(\nu)}$ ,  $\nu = 0, 1, \dots$ , bei gegebenem Startvektor  $u^{(0)}$  gegen die Lösung  $u = A^{-1}f$  konvergiert.

Sei der Fehler nach der  $\nu$ -ten Iteration definiert durch  $e^{(\nu)} = u - u^{(\nu)}$ . Dann ist Gleichung (2.1) äquivalent zu  $e^{(\nu+1)} = Me^{(\nu)}$  bzw.  $e^{(\nu+1)} = M^{\nu+1}e^{(0)}$ .  $M$  heißt die Iterationsmatrix des Verfahrens.

Zur Erinnerung:

Das Verfahren (2.1) konvergiert genau dann, wenn der Spektralradius der Iterationsmatrix kleiner eins ist, also wenn gilt  $\text{spr}(M) < 1$ .

Das gedämpfte Jacobiiterationsverfahren hat die Form

$$u^{(\nu+1)} = (I - \omega D^{(-1)}A)u^{(\nu)} + \omega D^{(-1)}f \quad (2.2)$$

mit  $M = B^{-1}C$  und  $N = B^{-1}$ ,  $B = \frac{1}{\omega}D$  und  $C = \frac{1}{\omega}[(1-\omega)D + \omega(L+U)]$ , wobei  $0 < \omega \leq 1$  und für eine  $n \times n$ -Matrix  $A$  gilt:  $A = D - L - U$  mit  $D = \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$  und strikten oberen bzw. unteren Dreiecksmatrizen  $L$  und  $U$ . Wir betrachten nun ein Beispiel, um die Glättungseigenschaft des Jacobiverfahrens zu untersuchen: Das eindimensionale Dirichlet-Randwertproblem (Poisson-Gleichung):

$$u''(x) = f(x), \quad \text{für } x \in \Omega = (0, 1)$$

$$u(x) = g(x), \quad \text{für } x \in \{0, 1\}$$

Zur Diskretisierung des Problems verwenden wir ein Gitter  $\Omega_h$  mit Schrittweite  $h = \frac{1}{n+1}$  und Gitterpunkten  $x_j = jh, j = 0, 1, \dots, n+1$ . Eine Diskretisierung der zweiten Ableitung am Punkt  $x_j$  ist dann gegeben durch

$$h^{-2}[u(x_{j-1}) - 2u(x_j) + u(x_{j+1}))] = u''(x_j) + O(h^2).$$

Lässt man den Diskretisierungsparameter  $h$  weg, erhält man ein Gleichungssystem der Form  $Au = f$ . Das Eigenwertproblem der zugehörigen Iterationsmatrix  $M$  ist gegeben durch  $M(\omega)v^k = \mu_k v^k$ . Die Eigenvektoren sind

$$v^k = (\sin(k\pi h j)), \quad k = 1, \dots, n$$

und die Eigenwerte sind

$$\mu_k = 1 - \omega(1 - \cos(k\pi h)), \quad k = 1, \dots, n.$$

Für  $0 < \omega \leq 1$  gilt  $\text{spr}(M(\omega)) < 1$ , d.h. das Jacobiverfahren konvergiert. Allerdings gilt z.B. für  $\omega = 1$  wegen  $\text{spr}(M(1)) = 1 - \frac{1}{2}\pi^2 h^2 + O(h^4)$ , dass die Konvergenz mit kleiner werdender Schrittweite  $h$  schlechter wird. Wir verwenden hier das Jacobiverfahren aber zur Fehlerglättung und werden daher im Folgenden diese Eigenschaft untersuchen. Dazu definieren wir zunächst hoch- bzw. niedrigfrequente Eigenvektoren, welche wiederum hoch- bzw. niedrigfrequente Fehleranteile definieren. Seien also

- niedrigfrequent (NF):  $v^k$  mit  $1 \leq k < \frac{n}{2}$ ,
- hochfrequent (HF):  $v^k$  mit  $\frac{n}{2} \leq k \leq n$ .

Nun definieren wir den Glättungsfaktor  $\mu$  als den größten Wert, bei dem HF Fehleranteile durch Iteration noch verkleinert werden. Hier gilt:

$$\mu = \max\{|\mu_k|, \frac{n}{2} \leq k \leq n\} = \max\{1-\omega, |1 - \omega(1 - \cos(\pi))|\} \leq \max\{1-\omega, |1 - 2\omega|\}.$$

D.h. den optimalen Glättungsfaktor  $\mu = \frac{1}{3}$  erhalten wir für  $\omega^* = \frac{2}{3}$ .

Wenden wir  $\nu$ -mal das gedämpfte Jacobiverfahren mit  $\omega = \omega^*$  auf den Startfehler  $e^{(0)}$  an, erhalten wir  $e^{(\nu)} = M(\omega^*)^\nu e^{(0)}$ . Für die einzelnen Fehlerkomponenten gilt  $e_k^{(\nu)} = \mu_k(\omega^*)^\nu e_k^{(0)}$ . Daher bewirken wenige Iterationsschritte eine starke Dämpfung der HF Anteile:  $|e_k^{(\nu)}| \ll |e_k^{(0)}|$ . Obwohl also der globale Fehler durch die Iteration größer wird, wird der Fehler schnell geglättet und dies unabhängig von der Schrittweite  $h$ .

Eine weitere Definition der Glättungseigenschaft eines iterativen Verfahrens stammt von Hackbusch. Sei  $M$  die Iterationsmatrix eines Glättungsverfahrens, s.d.  $e^{(\nu)} =$

$M^\nu e^{(0)}$ . Sei  $A_h$  der Diskretisierungsoperator. Dann ist der Glättungsfaktor definiert durch

$$\mu(\nu) = \|A_h M^\nu\| / \|A_h\|.$$

Die Iterationsmatrix heißt dann glättend, falls es eine Funktion  $\eta(\nu)$  gibt, s.d. für genügend großes  $\nu$  gilt:

$$\|A_h M^\nu\| \leq \eta(\nu) / h^\alpha,$$

mit  $\alpha > 0$  und  $\eta(\nu) \rightarrow 0$  für  $\nu \rightarrow \infty$ . Bei unserem Beispiel ist  $\alpha = 2$  und  $\eta(\nu) = \nu^\nu / (\nu + 1)^{(\nu+1)}$ .

## 2.2 Das Zweigitterverfahren

Nach einigen Iterationsschritten erhält man eine Näherungslösung  $\tilde{u}_h$ , deren Fehler  $\tilde{e}_h = u_h - \tilde{u}_h$  glatt ist. Wir können  $\tilde{e}_h$  daher auf einem größeren Gitter approximieren. Dazu müssen wir  $\tilde{e}_h$  als Lösung eines Gleichungssystems auf dem groben Gitter  $\Omega_H$  ausdrücken. Dessen linke und rechte Seite werden wir nun definieren.

Das Residuum  $r_h$  ist definiert durch  $r_h = f_h - A_h \tilde{u}_h$ . Da  $\tilde{u}_h$  glatt ist, ist es auch das Residuum. Durch Umformungen erkennt man, dass die ursprüngliche Gleichung  $A_h u_h = f_h$  und die Residuumsgleichung  $A_h \tilde{e}_h = r_h$  äquivalent sind. Da aber  $\tilde{e}_h$  und  $r_h$  glatt sind, kann man die Residuumsgleichung auf einem größerem Gitter mit Schrittweite  $H = 2h$  darstellen. Dazu definieren wir  $r_H$  als die Übertragung des Feingitterresiduums auf das grobe Gitter durch einen geeigneten Restriktionsoperator  $I_h^H$ , s.d.  $r_H = I_h^H r_h$ . Wir erhalten

$$A_H \tilde{e}_H = r_H,$$

wobei  $A_H$  den gleichen Diskretisierungsoperator darstellt wie  $A_h$ , nur bezüglich des groben Gitters  $\Omega_H$ . Haben wir  $\tilde{e}_H$  auf dem groben Gitter berechnet, können wir  $\tilde{e}_H$  mit einem Prologationsoperator  $I_H^h$  auf das feine Gitter übertragen.  $I_H^h \tilde{e}_H$  stellt eine Näherung des Fehlers  $\tilde{e}_h$  dar. Mit dieser Näherung verbessern wir nun die ursprüngliche Approximation  $\tilde{u}_h$ :

$$\tilde{u}_h^{neu} = \tilde{u}_h + I_H^h \tilde{e}_H.$$

Diese Verbesserung wird Grobgitterkorrektur genannt. Sie verringert, im Gegensatz zur Glättungssiteration, die niedrigfrequenten Fehleranteile.

Da die Interpolation von  $\tilde{e}_H$  HF Komponenten auf das feine Gitter übertragen kann, wird in der Praxis noch eine Nachglättung mit  $\nu_2$  Iterationsschritten vorgenommen.

Eine Zusammenfassung des Zweigitterverfahrens (ZGV) liefert der folgende Algorithmus. Die Iteration  $u_h^{(l)} = M u_h^{(l-1)} + N f_h$  wird hier abgekürzt zu  $u_h^{(l)} =$

$S_h(u_h^{(l-1)}, f_h)$ .

### Algorithmus 1 (ZGV)

Zu lösen:  $A_h u_h = f_h$

1. Vorglättung auf dem feinem Gitter:  $u_h^{(l)} = S_h(u_h^{(l-1)}, f_h)$ ,  $l = 1, \dots, \nu_1$
2. Berechnung des Residuums:  $r_h = f_h - A_h u_h^{(\nu_1)}$
3. Restriktion des Residuums:  $r_H = I_h^H r_h$
4. Lösen des Grobgitterproblems  $e_H = (A_H)^{-1} r_H$
5. Grobgitterkorrektur:  $u_h^{(\nu_1+1)} = u_h^{(\nu_1)} + I_H^h e_H$
6. Nachglättung auf dem feinem Gitter:  $u_h^{(l)} = S(u_h^{(l-1)}, f_h)$ ,  $l = \nu_1 + 2, \dots, \nu_1 + \nu_2 + 1$

Um eine vorgegebene Fehlertoleranz zu erreichen, wird das Zweigitterverfahren iterativ angewendet. Die Iterationmatrix des Verfahren ist dann

$$M_{ZGV} = S_h^{\nu_2} (I_h - I_H^h (A_H)^{-1} I_h^H A_h) S_h^{\nu_1},$$

mit der identischen Abbildung  $I_h$  und den Iterationmatrizen der Glättung  $S_h$ . Eine Herleitung der Iterationsmatrix des Mehrgitterverfahrens findet sich im nächsten Abschnitt.

Wir werden nun die Approximationseigenschaft definieren, die angibt, wie gut die Grobgitterlösung die Feingitterlösung annähert. Eine Abschätzung liefert

$$\|A_h^{-1} - I_H^h A_H^{-1} I_h^H\| \leq c_A h^\alpha.$$

D.h. die Differenz zwischen  $u_h = A_h^{-1} f_h$  und  $I_H^h u_H = I_H^h A_H^{-1} I_h^H f_h$  wird gemessen. Die Konstante  $c_A$  ist ein Maß für die Schwachbesetztheit der Matrix  $A$ .

Zusammen mit der oben definierten Glättungseigenschaft können wir nun die Konvergenz des Zweigitterverfahrens beweisen. Wir setzen dazu  $\nu_2 = 0$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} \|M_{ZGV}\| &= \|(I_h - I_H^h A_H^{-1} I_h^H A_h) S_h^{\nu_1}\| \\ &= \|(A_h^{-1} - I_H^h A_H^{-1} I_h^H) A_h S_h^{\nu_1}\| \\ &\leq \|(A_h^{-1} - I_H^h A_H^{-1} I_h^H)\| \|A_h\| S_h^{\nu_1} \\ &\leq c_A \eta(\nu_1), \end{aligned}$$

wobei  $c_A \eta(\nu_1) < 1$  für genügend großes  $\nu_1$ .

## 2.3 Das Mehrgitterverfahren

Da beim Zweigitterverfahren die Grobgittergleichung  $A_H e_H = f_H$  die gleiche Struktur hat wie die Ausgangsgleichung  $A_h u_h = f_h$ , liegt es nahe,  $e_H$  selbst durch Näherung auf einem gröberem Gitter zu berechnen. Wendet man hierzu das Zweigitterverfahren rekursiv an und löst die entsprechende Residuumsgleichung nur auf dem größten Gitter, spricht man vom Mehrgitterverfahren. Man geht dabei wie folgt vor.

Zunächst führen wir eine Gitterfolge  $\Omega_{h_k}$  mit Schrittweite  $h_k$  und Stufenindex  $k = 1, 2, \dots, L$  ein, s.d.  $h_{k-1} = 2h_k$ . Sei  $n_k$  die Anzahl der inneren Gitterpunkte. Zu jedem Stufenindex  $k$  definieren wir ein Gleichungssystem  $A_k u_k = f_k$  mit einer  $n_k \times n_k$  Matrix  $A_k$  und Vektoren  $u_k$  und  $f_k$ . Der Übergang zwischen zwei Stufen geschieht durch zwei lineare Abbildungen, dem Restriktionsoperator  $I_k^{k-1}$  und dem Prolongationsoperator  $I_{k-1}^k$ . Eine Glättungsiteration sei  $u_k = S_k(u_k^{l-1}, f_k)$ . Algorithmus 2 stellt das Mehrgitterverfahren (MGV) dar.

**Algorithmus 2 (MGV)** Zu lösen:  $A_k u_k = f_k$

1. Falls  $k = 1$ , löse  $A_k u_k = f_k$
2. Vorglättung auf dem feinem Gitter:  $u_k^{(l)} = S_k(u_k^{(l-1)}, f_k)$ ,  $l = 1, \dots, \nu_1$
3. Berechnung des Residuums:  $r_k = f_k - A_k u_k^{(\nu_1)}$
4. Restriktion des Residuums:  $r_{k-1} = I_k^{k-1} r_k$
5. Setze  $u_{k-1} = 0$
6. Rufe das Verfahren  $\gamma$  mal auf, um  $A_{k-1} u_{k-1} = f_{k-1}$  zu lösen
7. Grobgitterkorrektur:  $u_k^{(\nu_1+1)} = u_k^{(\nu_1)} + I_{k-1}^k u_{k-1}$
8. Nachglättung auf dem feinem Gitter:  $u_k^{(l)} = S(u_k^{(l-1)}, f_k)$ ,  $l = \nu_1 + 2, \dots, \nu_1 + \nu_2 + 1$

Der Wert  $\gamma$  gibt hier an, wie viele Iterationsschritte des Mehrgitterverfahrens angewendet werden, um die Grobgittergleichung zu lösen. Da das Verfahren schnell konvergiert, wird in der Praxis  $\gamma = 1$  oder  $\gamma = 2$  verwendet. Im Fall  $\gamma = 1$  spricht man von einem V-Zyklus, für  $\gamma = 2$  von einem W-Zyklus (siehe Abbildung). Die Konvergenzrate entspricht in etwa der des verwendeten Zweigitterverfahrens. Der Aufwand ist aber geringer, da die Inverse  $A_k^{-1}$  auf dem größten Gitter berechnet wird.

Die Iterationmatrix des Mehrgitterverfahrens ist gegeben durch

$$M_1 = 0, \text{ für } k = 2, \dots, L :$$

$$M_k = S_k^{\nu_2} (I_k - I_{k-1}^k (I_{k-1} - M_{k-1}^\gamma) A_{k-1}^{-1} I_k^{k-1} A_k) S_k^{\nu_2}.$$

Herleitung: Sei  $e_k^{(0)}$  der Fehler zu Beginn der  $k$ -ten Iteration. Nach  $\nu_1$  Vorglättungsschritten erhalten wir  $e_k = S_k^{\nu_1} e_k^{(0)}$  und das Residuum  $r_k = A_k e_k$ . Auf dem groben Gitter wird der Fehler dargestellt durch die Gleichung  $e_{k-1} = A_{k-1}^{-1} I_k^{k-1} r_k$ . Die Näherung an  $e_{k-1}$  nach  $\gamma$  Mehrgitterzyklen  $M_{k-1}$  sei  $v_{k-1}^{(\gamma)}$ . Dann gilt

$$e_{k-1} - v_{k-1}^{(\gamma)} = M_{k-1}^\gamma (e_{k-1} - v_{k-1}^{(0)}).$$

Nach Algorithmus 2 setzen wir  $v_{k-1}^{(0)} = 0$  und erhalten  $e_{k-1} - v_{k-1}^{(\gamma)} = M_{k-1}^\gamma e_{k-1}$  bzw.  $v_{k-1}^{(\gamma)} = (I_{k-1} - M_{k-1}^\gamma) e_{k-1}$ . Daraus folgt

$$v_{k-1}^{(\gamma)} = (I_{k-1} - M_{k-1}^\gamma) e_{k-1} = (I_{k-1} - M_{k-1}^\gamma) A_{k-1}^{-1} I_k^{k-1} r_k = (I_{k-1} - M_{k-1}^\gamma) A_{k-1}^{-1} I_k^{k-1} A_k e_k.$$

Die Grobgitterkorrektur lautet dann  $u_k^{\nu_1+1} = u_k^{\nu_1} + I_{k-1}^k v_{k-1}^{(\gamma)}$  bzw.  $e_k^{\nu_1+1} = e_k - I_{k-1}^k v_{k-1}^{(\gamma)}$ . Ersetzen wir  $v_{k-1}^{(\gamma)}$  durch obige Gleichung, erhalten wir

$$e_k^{\nu_1+1} = (I_k - (I_{k-1} - M_{k-1}^\gamma) A_{k-1}^{-1} I_k^{k-1} A_k) e_k.$$

Mit den Iterationsmatrizen der Vor- und Nachglättung erhält man die Matrix  $M_k$ .

# Kapitel 3

## Das Mehrgitterverfahren für nicht-lineare Probleme

Gegeben sei das nicht-lineare Problem  $A(u) = f$  und eine Diskretisierung  $A_k(u_k) = f_k$ . Nach Vorglättung erhalten wir eine Näherungslösung  $\tilde{u}_k$ . Der Fehler  $e_k$  ist definiert durch  $A_k(\tilde{u}_k + e_k) = f_k$ . Die Residuumsgleichung  $A_k(e_k) = f_k$  macht hier keinen Sinn. Stattdessen schreiben wir die Definition des Fehlers um zu

$$A_k(\tilde{u}_k + e_k) - A_k(\tilde{u}_k) = r_k \quad (3.1)$$

für  $r_k := f_k - A_k(\tilde{u}_k)$ . Um Gleichung (3.1) auf dem nächst größeren Gitter auszudrücken definieren wir  $\hat{u}_{k-1} := \hat{I}_k^{k-1} \tilde{u}_k + e_{k-1}$  und ersetzen  $A_k(\cdot)$  durch  $A_{k-1}(\cdot)$ ,  $\tilde{u}_k$  durch  $\hat{I}_k^{k-1} \tilde{u}_k$  und  $r_k$  durch  $I_k^{k-1} r_k = I_k^{k-1}(f_k - A_k(\tilde{u}_k))$ . Wir erhalten

$$A_{k-1}(\hat{u}_{k-1}) = I_k^{k-1}(f_k - A_k(\tilde{u}_k)) + A_{k-1}(\hat{I}_k^{k-1} \tilde{u}_k). \quad (3.2)$$

Oder mit  $\tau_k^{k-1} = A_{k-1}(\hat{I}_k^{k-1} \tilde{u}_k) - I_k^{k-1} A_k(\tilde{u}_k)$

$$A_{k-1}(\hat{u}_{k-1}) = I_k^{k-1} f_k + \tau_k^{k-1}. \quad (3.3)$$

Gleichung (3.3) ohne  $\tau_k^{k-1}$  entspricht der ursprüngliche Gleichung, dargestellt auf dem groben Gitter.  $\tau_k^{k-1}$  wird als Residuumskorrektur bezeichnet.

$\hat{u}_{k-1}$  kann nicht direkt auf das feinere Gitter interpoliert werden, da wegen  $\hat{u}_{k-1} := \hat{I}_k^{k-1} \tilde{u}_k + e_{k-1}$  nicht nur Fehler der Korrektur  $e_{k-1}$ , sondern Fehler der ganzen Lösung übertragen würden. Deshalb wird folgende Form der Grobgitterkorrektur verwendet:

$$u_k = \tilde{u}_k + I_{k-1}^k(\hat{u}_{k-1} - \hat{I}_k^{k-1} \tilde{u}_k)$$

Algorithmus 3 fasst das Mehrgitterverfahren für nicht-lineare Probleme zusammen.

### Algorithmus 3

Zu lösen:  $A_k(u_k) = f_k$

1. Falls  $k = 1$ , löse  $A_k(u_k) = f_k$
2. Vorglättung auf dem feinem Gitter:  $u_k^{(l)} = S_k(u_k^{(l-1)}, f_k)$ ,  $l = 1, \dots, \nu_1$
3. Berechnung des Residuums:  $r_k = f_k - A_k u_k^{(\nu_1)}$
4. Restriktion des Residuums:  $r_{k-1} = I_k^{k-1} r_k$
5. Setze  $u_{k-1} = \hat{I}_k^{k-1} u_k^{\nu_1}$
6. Setze  $f_{k-1} = r_{k-1} + A_{k-1}(u_{k-1})$
7. Rufe das Verfahren  $\gamma$  mal auf, um  $A_{k-1}(u_{k-1}) = f_{k-1}$  zu lösen
8. Grobgitterkorrektur:  $u_k^{(\nu_1+1)} = u_k^{(\nu_1)} + I_{k-1}^k (u_{k-1} - \hat{I}_k^{k-1} u_k^{(\nu_1)})$
9. Nachglättung auf dem feinem Gitter:  $u_k^{(l)} = S(u_k^{(l-1)}, f_k)$ ,  $l = \nu_1 + 2, \dots, \nu_1 + \nu_2 + 1$

# Kapitel 4

## Das vollständige Mehrgitterverfahren

Verwendet man das Mehrgitterverfahren bereits, um einen geeigneten Startwert für das Problem auf dem feinsten Gitter zu finden, spricht man vom vollständigen Mehrgitterverfahren (VMGV). Dabei wird folgendermaßen vorgegangen: Zunächst wird auf einem groben Gitter  $\Omega_{h_l}$  die Gleichung  $A_l u_l = f_l$  bzw.  $A_l(u_l) = f_l$  gelöst und die Lösung auf das nächst feinere Gitter prolongiert. Dort wird das Mehrgitterverfahren zum Lösen der Gleichung  $A_{l+1} u_{l+1} = f_{l+1}$  bzw.  $A_{l+1}(u_{l+1}) = f_{l+1}$  angewendet und wieder prolongiert. Dies wird wiederholt, bis das feinste Gitter  $\Omega_{h_L}$  erreicht ist und mit der gewonnenen Näherung  $u_L$  wird das Mehrgitterverfahren begonnen.

### Algorithmus 4 (VMGV)

Zu lösen:  $A_L(u_L) = f_L$

1. Berechne  $u_l$
2. Falls  $l < L$  interpoliere auf das nächst feinere Gitter:  $u_{l+1} = \tilde{I}_l^{l+1} u_l$
3. Wende das MGV auf  $A_{l+1}(u_{l+1}) = f_{l+1}$  an
4. Falls  $l + 1 < L$  setze  $l = l + 1$  und gehe zu 2.

# Quellenangaben

1. A. Borzi: Introduction to multigrid methods
2. W. Hackbusch: Iterative Lösung großer schwachbesetzter Gleichungssysteme, Teubner-Verlag, 1991
3. A. Sommer: Einführung in Mehrgitterverfahren