Galerkin-Verfahren

Ausarbeitung zum Vortrag im Rahmen des Seminars

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen

unter der Leitung von Prof. Dr. Peter Bastian

WS 2010/11

von

Ina Schüssler

Inhaltsverzeichnis

1 Motivation

Galerkin-Verfahren sind numerische Verfahren zur Lösung von Differentialgleichungen und eine Variante der Methode der gewichteten Residuen. Ausgehend von der variationellen Formulierung der Anfangswertaufgabe wird eine Näherungslösung auf einem endlich dimensionalen Ansatzraum gesucht. Die Näherungslösung ist die Orthogonalprojektion (bezüglich des L2-Skalarprodukts) der Lösungsfunktion auf den Ansatzraum.
Galerkin-Verfahren spielen eine wichtige Rolle bei der Lösung von partiellen DGL. Sie haben den Vorteil, dass der Diskretisierungsfehler sich in einen Verfahrensfehler und in einen Quadraturfehler separieren lassen. Aus den dG(r)-Verfahren ergeben sich Einschrittverfahren beliebig hoher Ordnung ($O(h^{(r+1)})$, die (zumindest prinzipiell) auch zur Integration steifer Probleme geeignet sind und nur Funktionsauswertungen auf der rechten Seite erfordern.

2 Verfahrensprinzip

2.1 Variationelle Formulierung

Es werden im Folgenden Anfangswertaufgaben der Form

$$u' = f(t,u), \quad t \geq t_0, \quad u(t_0) = u_0 \quad (0)$$

betrachtet. Die integrale Formulierung der AWA

$$\int_I (u' - f(t,u), \varphi) dt = 0 \quad \forall \varphi \in C(I)^d \qquad (1)$$

$$u(t_0) = u_0$$

mit $I = [t_0, t_0 + T]$ ist äquivalent zur differentiellen Formulierung. Sie soll erfüllt sein für beliebige Testfunktionen φ, man nennt sie deshalb "variationelle" Formulierung.

Beweis:
((0) $\Rightarrow$ (1)): klar
((1) $\Rightarrow$ (0)): Wähle die Testfunktion als Dirac-Funktion $\varphi = \delta_\epsilon(t; \cdot)$, so dass

$$\int_I (u' - f_i(s,u))\delta_\epsilon(t;s)\, ds \quad \rightarrow \quad u_i'(t) - f_i(t,u(t)) \qquad (\epsilon \rightarrow 0)$$

$\square$

2.2 "Unstetige" Ansatzfunktionen

Die Testfunktonen φ müssen nicht stetig sein, wir teilen hierfür das Lösungsintervall $I = [t_0, t_0 + T]$ auf in eine endliche Zerlegung:

$$t_0 < t_1 < ... < t_N = t_0 + T, \quad I_n = (t_{n-1}, t_n]$$

mit

$$h_n = t_n - t_{n-1}, \quad h = \max_{1 \leq n \leq N} h_n$$

und definieren den Raum stückweise glatter Funktionen:

$$V(I) = \{v : I \rightarrow \mathbb{R}^d : v(t_0) \in \mathbb{R}^d, v_{|I_n} \in C_c^1(I_n)^d, n = 1, ..., N\}$$

Gesucht ist nun eine Funktion $u \in V(I)$, die folgende Eigenschaften erfüllt:

$$\sum_{n=1}^{N} \left\{ \int_{I_n} (u' - f(t,u), \varphi)dt + ([u]_{n-1}, \varphi_{n-1}^+) \right\} = 0 \quad \forall \varphi \in V(I) \quad (2)$$

$$u(t_0) = u_0 = u_0^-$$

mit den Schreibweisen:
$v_n^+ = lim_{t \downarrow t_n} v \quad , \quad v_n^- = lim_{t \uparrow t_n} v \quad , \quad [v]_n = v_n^+ - v_n^- \quad$ für $v \in V(I)$.

Sinn dieser Formulierung ist es, dass bei der Diskretisierung auch die Ansatzfunktionen unstetig sein dürfen, die Lösungsfunktion u ist aber nach wie vor stetig. Wir zeigen, dass (2) äquivalent zu (1) ist:

Beweis:
(1) $\Rightarrow$ (2):
u sei Lösung der AWA. Es gilt $u \in C^1(I)^d$, also $[u]_n = 0 \quad \forall n = 1, ..., N$ und damit ist (2) zu (1) identisch.

(2) $\Rightarrow$ (1):
a) u sei Lösung von (2) und u sei stetig. Dann gilt $[u]_n = 0 \quad \forall n = 1, ..., N$.
Es bleibt zu zeigen, dass u stetig differenzierbar ist.
Wähle dafür φ so, dass $\varphi \equiv 0$ auf allen Intervallen $I_i \neq I_n$. Es folgt

$$\int_{I_n} (u' - f(t,u), \varphi) = 0 \quad \forall \varphi$$

und damit

$$u'_{|I_n} = f(t, u_{|I_n})$$

Das gleiche gilt für alle anderen Teilintervalle von I. Es folgt

$$u' = f(t,u)$$

Aus der Stetigkeit von $f(t,u)$ folgt, dass u stetig differenzierbar auf I ist:

$$\sum_{n=1}^{N} \int_{I_n} (u' - f(t,u), \varphi)dt = \int_I (u' - f(t,u), \varphi)dt$$

u ist auch Lösung von (1).

b) Sei u Lösung von (2) und unstetig. Wähle $\varphi_\epsilon(t)$ so, dass $\varphi_{\epsilon,n}^+ = 1$ und $\varphi_\epsilon(t) \to 0 \quad (\epsilon \to 0)$. Daraus folgt $[u]_n = 0$. Ein solches φ kann man wählen für alle $n \geq 1$. Das ist ein Widerspruch zur Unstetigkeit von u. $\square$

Die Lösung u von (2) ist also immer stetig. Nebenbei ergibt sich noch, dass $u_0^+ = u_0$ für $n = 0$.

2.3 Diskretisierung

Zur numerischen Behandlung ist es notwendig, eine Diskretisierung einzuführen.
Die Galerkin-Methode restringiert Gleichung (1) auf einen geeigneten endlich dimensionalen Ansatzraum und bestimmt auf diesem eine Näherungslösung U der AWA.

Hierfür wählen wir eine Basis $\{\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n\}$ des (ebenfalls endlich dimensionalen) Testraums und bestimmen U so, dass das Residuum

$$R := U' - f(t, U)$$

bezüglich des $L^2(I)^d$-Skalarprodukts orthogonal zu allen Testfunktionen ist.

Wir wählen als Test- und Ansatzraum den Raum der stückweise glatten Polynomfunktionen vom Grad $\leq r$:

$$S_h^{(r)}(I) = \{\varphi \in V(I) : \varphi(t_0) \in \mathbb{R}^d, \varphi_{|I_n} \in P_r(I_n)^d, n = 1, ..., N\} \subset V(I)$$

und erhalten damit die sogenannten $dG(r)$-Verfahren.

Gesucht ist eine Funktion $U \in S_h^{(r)}(I)$ mit

$$U_0^- = u_0$$

und

$$\sum_{n=1}^{N} \left\{ \int_{I_n} (U' - f(t, U), \varphi) dt + ([U]_{n-1}, \varphi_{n-1}^+) \right\} = 0 \quad \forall \varphi \in S_h^{(r)}(I) \quad (3).$$

Durch die Restriktion auf endlich dimensionale Ansatzräume ist die Genauigkeit der Lösung U beschränkt. Nach spätestens $m = \dim\left(S_h^{(r)}(I)\right)$ "Orthogonalisierungen" ist die maximale Genauigkeit erreicht. U ist dann bezüglich aller Basisvektoren von $S_h^{(r)}(I)$ optimiert. Die Näherungslösung U ist die orthogonale Projektion der exakten, kontinuierlichen Lösung u auf den Testraum. Sie muss selbst nicht stetig sein.

Wegen der zugelassenen Unstetigkeit der Testfunktionen kann der Galerkin-Ansatz (2) auch als sukzessives Zeitschrittverfahren geschrieben werden. Man wählt dafür $\varphi \equiv 0$ für alle Teilintervalle $I_i \neq I_n$ und erhält so die lokale Galerkin-Gleichung:

$$\int_{I_n} (U', \varphi)\, dt + (U_{n-1}^+, \varphi_{n-1}^+) = \int_{I_n} (f(t, U), \varphi)\, dt + (U_{n-1}^-, \varphi_{n-1}^+) \quad \forall \varphi \in P_r(I_n) \quad (4)$$

2.4 Beispiele: dG(0)-Verfahren und Petrov-Galerkin-Verfahren

Beispiel 1: **dG(0)-Verfahren**

Wähle $r = 0$ und $d = 1$.
Die lokale Galerkin-Gleichung reduziert sich dann zu

$$\int_{I_n} U' 1\, dt + U_{n-1}^+ 1 = \int_{I_n} f(t, U) 1\, dt + U_{n-1}^- 1$$

mit der konstanten Testfunktion $\varphi = 1$.

$$\int_{I_n} U'\, dt + U_{n-1}^+ = \int_{I_n} f(t, U)\, dt + U_{n-1}^-$$

$$U_n^- - U_{n-1}^+ + U_{n-1}^+ = \int_{I_n} f(t, U)\, dt + U_{n-1}^-$$

Wegen $U_{|I_n} \in P_0(I_n)$ gilt: $U = U_{n-1}^+ = U_n^-$.
Mit $U_n := U_n^-$ folgt:

$$U_n = \int_{I_n} f(t, U_n)\, dt + U_{n-1}.$$

Bei Approximation des Integrals mit der Boxregel erhält man das implizite Euler-Verfahren:

$$U_n = U_{n-1} + h_n\, f(t, U_n)$$

Wählt man die Teilintervalle $I_n = [t_{n-1}, t_n)$ rechts offen und setzt $U_n := U_{n-1}^+$ erhält man das explizite Euler-Verfahren.

Beispiel 2: **Petrow-Galerkin-Verfahren**

Es gibt Variationen des Galerkin-Verfahrens, bei denen Test- und Ansatzraum nicht identisch sind, zum Beispiel die sogenannten Petrov-Galerkin-Verfahren (siehe Beispiel 2), bei denen die Ansatzfunktionen U stetig, die Testfunktionen aber unstetig sind. Die Testfunktionen müssen notwendigerweise unstetig gewählt werde, wenn das Galerkin-Verfahren ein sukzessives Zeitschrittverfahren liefern soll.

Auf dem Intervall I_n sei $\varphi \in P_0(I_n)$ und $U_{|I_n} \in P_1(I_n)$.
Zusätzlich soll die Näherungsfunktion U auf dem Gesamtintervall I stetig sein, d.h. $U_n^- = U_n^+$.

Die lokale Galerkin-Gleichung reduziert sich zu

$$\int_{I_n} \{U' - f(t, U)\}\, dt = 0$$

mit linearen Ansatzfunktionen:

$$U(t) = U_{n-1} + \frac{t - t_{n-1}}{h_n}(U_n - U_{n-1})$$

Ansatzraum und Testraum sind hier von unterschiedlichem Grad. Die Lösung U ist trotzdem eindeutig, aber nur, weil der Ansatzraum durch die zusätzlichen “Anfangswerte“ auf jedem I_n eines Freiheitsgrades beraubt wird.

3 dG(r)-Verfahren

Wir betrachten ab jetzt Galerkin-Verfahren, bei denen sowohl die Testfunktionen, als auch die Ansatzfunktionen aus dem Raum $S_h^{(r)}(I)$ der stückweisen Polynomfunktionen stammen, sogenannte dG(r)-Verfahren.

3.1 dG(r)-Verfahren für nicht steife AWA

Satz: $f(t, x)$ sei Lipschitz-stetig mit der Lipschitz-Konstanten L. Für jedes $r \geq 0$ gibt es eine Konstante $\lambda > 0$, so dass die Galerkin-Gleichung (3) unter der Bedingung $h < \lambda/L$ eine eindeutige Lösung $U \in S_h^{(r)}(I)$ besitzt.

Beweis: Sei U bis zum Zeitpunkt t_n berechnet. Zur Bestimmung von $U_{|I_n}$ interpretiert man Gleichung (4) als Fixpunktgleichung mit Fixpunkt U für alle φ. Wir zeigen, dass dadurch eine Fixpunktabbildung $g : P_r I_n \to P_r I_n$ definiert ist (U_{n-1}^- ist fest).
Seien hierfür $\tilde{U}, \tilde{V} \in P_r(I_n)$ beliebig und $U = g(\tilde{U})$, $V = g(\tilde{V})$.

Über mehrere Abschätzungen unter Verwendung der L-Stetigkeit (s. [1]) von $f(t, U)$ und der Sobolevschen Ungleichung (siehe unten) erhält man:

$$\sup_{I_n} \|W\|^2 \leq \kappa^2 \left\{ \frac{1}{2} L^2 h_n^2 \sup_{I_n} \|\tilde{W}\|^2 + 2Lh_n \sup_{I_n} \|\tilde{W}\| \sup_{I_n} \|W\| \right\}$$

und daraus

$$\sup_{I_n} \|W\| \leq \gamma^{-1} L h_n \sup_{I_n} \|\tilde{W}\|$$

mit $W := U - V = g(\tilde{U}) - g(\tilde{V})$ und $\tilde{W} := \tilde{U} - \tilde{V}$ und einer festen Konstanten $\gamma > 0$.

Aus der letzten Abschätzung ergibt sich die Schrittweitenbedingung $h_n < \gamma/L$. Aus der L-Stetigkeit von $g(\cdot)$ und dieser Bedingung folgt, dass $g(\cdot)$ eine Kontraktion ist. Damit ist die Galerkin-Gleichung nach dem Banachschen Fixpunktsatz eindeutig lösbar. □

Hilfssatz: Diskrete Sobolevsche Ungleichung (Beweis: s.[1]
Sei $\varphi \in P_r(I_n)$. Dann gilt:

$$\sup_{I_n} \|\varphi\| \leq \kappa (\int_{I_n} \|\varphi'\|^2 (t - t_{n-1}) dt + \|\varphi_n^-\|^2)^{1/2}$$

mit einer von der Intervalllänge h_n unabhängigen Konstanten $\kappa > 0$.

3.2 dG(r)-Verfahren für steife AWA

Satz: $f(t, x)$ sei L-stetig und strikt monoton, d.h.

$$\|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L \|x - y\|$$
$$-(f(t, x) - f(t, y), x - y) \geq \gamma \|x - y\|^2, \quad t \in I, \quad x, y \in \mathbb{R}^d$$

mit einer Konstanten $\gamma > 0$ Die Galerkin-Gleichung (3) besitzt dann unabhängig von der Schrittweite eine eindeutige Lösung $U \in S_h^{(r)}(I)$, die mit dem Newton-Verfahren berechnet werden kann.
Für r=0 und r=1 reicht $\gamma \geq 0$ aus.

Beweis: Die lokale Galerkin-Gleichung

$$\int_{I_n} (U' - f(t, U), \varphi) \, dt + (U_{n-1}^+, \varphi_{n-1}^+) = (U_{n-1}^-, \varphi_{n-1}^+) \quad \forall \varphi \in P_r(I_n)$$

ist äquivalent zu einer nichtlinearen Gleichung $g(U) = F$ mit $F_{\|I_n} \equiv 0$ und $F_{n-1}^- = U_{n-}^-$.
Nach *Hilfssatz: Monotone Gleichungen* (siehe unten) ist diese Gleichung eindeutig lösbar, wenn g strikt monoton ist.
Die Monotonie von g muss gezeigt werden.
Für zwei Funktionen $U, V \in P_r(I_n)$ und ihre Differenz $W := U - V$ gilt:

$$(g(U) - g(V), W) = \int_{I_n} (W' - f(t, U) + f(t, V), W) \, dt + \|W_{n-1}^+\|^2.$$

Mit $(W', W) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|W\|^2$ und der Monotonieeigenschaft von $f(t, \cdot)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
(g(U) - g(V), W) &\geq \int_{I_n} \{ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|W\|^2 + \gamma \|W\|^2 \} \, dt + \|W_{n-1}^+\|^2 \\
&= \frac{1}{2} \|W_n^-\|^2 + \frac{1}{2} \|W_{n-1}^+\|^2 + \gamma \int_{I_n} \|W\|^2 \, dt \\
&\geq \gamma^* \|U - V\|^2
\end{aligned}$$

Der letzte Schritt ergibt sich aus der Äquivalenz der Normen auf $P_r(I_n)$. $\square$

Hilfssatz: Monotone Gleichungen (Beweis: s. [1])
Die nichtlineare Gleichung $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ sei L-stetig und strikt monoton.
Dann besitzt die Gleichung

$$g(x) = c$$

für jede rechte Seite $c \in \mathbb{R}^d$ eine eindeutig bestimmte Lösung $x \in \mathbb{R}^d$.

4 Galerkin-Orthogonalität:

Wir definieren die Semi-Linearform (linear bezüglich des zweiten Arguments φ)

$$A(W;\varphi) := \sum_{n=1}^{N} \int_{I_n} (W' - f(t,W), \varphi)dt + \sum_{n=2}^{N} ([W]_{n-1}, \varphi_{n-1}^+) + (W_0^+, \varphi_0^+)$$

Die kontinuierliche Lösung u von (2) erfüllt die Gleichung

$$A(u;\varphi) = (u_0, \varphi_0^+) \quad \forall \varphi \in S_h^{(r)}(I) \qquad (i)$$

Der Galerkin-Ansatz (2) ist dann äquivalent zur Bestimmung eines $U \in S_h^{(r)}(I)$ mit den Eigenschaften

$$A(U;\varphi) = (u_0, \varphi_0^+) \quad \forall \varphi \in S_h^{(r)}(I) \qquad (ii)$$

Die Anfangsbedingung ist hier implizit.

Aus $(i) - (ii)$ ergibt sich die Galerkin-Orthogonalität:

$$A(u;\varphi) - A(U;\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in S_h^{(r)}(I)$$

In Projektion auf den Testraum ist u zu U identisch.

5 A priori - Fehleranalyse

5.1 Beispiel für dG(0)-Verfahren

Wir betrachten die AWA:

$$u'(t) = f(t), \quad t \in I = [0,1], \quad u(0) = 0$$

Das dG(0)-Verfahren nimmt angewendet auf die AWA die Gestalt

$$U_n^- = U_{n-1}^+ = \int_{I_n} f(t)\,dt + U_{n-1}^-$$

an.
Die exakte Lösung erfüllt diesselbe Gleichung

$$u_n = \int_{I_n} f(t)\,dt + U_{n-1},$$

so dass der Fehler $e = u - U$ zu den Zeitpunkten t_n^- verschwindet.
In den Zwischenpunkten $t \in I_n$ gilt:

$$|e(t)| = \left| \int_t^{t_n} e' \right| = \left| \int_t^{t_n} u' \right| \le h_n \sup_{I_n} |u'|$$

und global:

$$\sup_{I_n} |e| \leq \max_{1\leq n\leq N} \{h_n \sup_{I_n} |u'|\}$$

Zusätzlich zu diesem reinen Verfahrensfehler kommt noch der Quadraturfehler dazu, der bei der näherungsweisen Berechnung des Integrals entsteht.
Wertet man die rechte Seite der AWA mit der Box-Regel aus beträgt er wie beim impliziten Euler-Verfahren:

$$\sup_{I_n} |e| \leq \frac{1}{2}\, T \max_{1\leq n\leq N} \{h_n \sup_{I_n} |u''|\}$$

Der Fehler hängt linear von der Zeit T ab, was bei großen Intervallen ein Nachteil ist. Bei Auswertung mit einer Quadraturformel 2. Ordnung, z.B. der Mittelpunktsregel dagegen:

$$e_n = e_{n-1} + \frac{1}{24}\, h_n^3 f''(\zeta_n)$$

Der Faktor T kann hier durch die höhere Potenz von h_n kompensiert werden.
Ein Vorteil der dG-Verfahren ist es, dass der reine Verfahrensfehler und der Quadraturfehler getrennt sind:

$$\sup_{I} \|e\| \leq \max_{1\leq n\leq N} \{h_n \sup_{I_n} |u'| + \frac{1}{24}\, T h_n^2 \sup_{I_n} |f''|\}$$

5.2 A priori Fehler

Satz: Für das dG(r)-Verfahren gilt bei geeigneten Schrittweiten $h < \lambda/L$ die a priori Fehlerabschätzung

$$\sup_{I} \|e\| \leq K \max_{1\leq n\leq N} \{h_n^{r+1} \sup_{I_n} \|u^{(r+1)}\|\},$$

mit einer exponentiell von L und T abhängigen Konstanten $K = K(L, T)$.

Beweis: Ziel ist es eine Abschätzung für $\sup_{I_n} \|e\|^2$ zu finden.
Der Beweis wird in mehreren Schritten geführt.

1. Der exakten Lösung u wird eine (lokal) eindeutige Approximierende $\bar{U} \in S_h^{(r)}(I)$ zugeordnet durch die Vorschrift:

$$\bar{U}_n^- = u(t_n), \qquad \int_{I_n} (\bar{U} - u) q \, dt = 0 \quad \forall q \in P_{r-1}(I_n)^d,\, n = 1, ..., N.$$

   Im Interpolationssatz (Beweis: siehe unten) wird gezeigt, dass diese Approximierende eindeutig ist und die Abschätzung

$$\sup_{I_n} \|u - \bar{U}\| \leq c_I h_n^{r+1} \sup \|u^{(r+1)}\|$$

   gilt.

2. Wir trennen den Fehler $e := u - U$ auf in $\bar{e} := u - \bar{U}$ und $\eta := \bar{U} - U$, die getrennt abgeschätzt werden. Es gilt dann $e = \bar{e} + \eta$.

3. a) Die Abschätzung von $\bar{e}$ ist durch den Interpolationssatz schon gegeben.
   b) Abschätzung von η mit Hilfe der Sobolevschen Ungleichung.

4. Kombination der Abschätzungen aus 1. und 3.

zu 3 b)
Wir benutzen die diskrete Sobolevsche Ungleichung:
Sei $\eta \in P_r(I_n)$. Dann gilt:

$$\sup_{I_n} \|\eta\|^2 \leq \kappa^2 \left\{ \int_{I_n} \|\eta'\|^2 (t - t_{n-1})\, dt + \|\eta_n^-\|^2 \right\}$$

mit einer von der Intervalllänge h_n unabhängigen Konstanten $\kappa > 0$.
Um diese Abschätzung nutzen zu können, brauchen wir wiederum Abschätzungen von $\|\eta'\|^2(t-t_{n-1})\, dt$ und von $\|\eta_n^-\|^2$.

Abschätzung von $\|\eta_n^-\|^2$:
Für die Approximierende $\bar{U}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\int_{I_n} (\bar{U}', \varphi)\, dt + (U_{n-1}^+, \varphi_{n-1}^+) &= -\int_{I_n} (\bar{U}, \varphi')\, dt + (\bar{U}_n^-, \varphi_n^-) \\
&= -\int_{I_n} (u, \varphi')\, dt + (u_n, \varphi_n^-) \\
&= \int_{I_n} (u', \varphi)\, dt + (u_{n-1}, \varphi_{n-1}^+) \\
&= \int_{I_n} (f(t,u), \varphi)\, dt + (u_{n-1}, \varphi_{n-1}^+). \qquad (ii)
\end{aligned}$$

Erklärung der Schritte: 1. partielle Integration, 2. Ausnutzen, dass $\bar{U} = u$ in Projektion auf den Testraum $P_{r-1}(I_n)^d$ (es gilt $\varphi' \in P_{r-1}(I_n)^d$), 3. nochmalige partielle Integration, 4. $u' = f(t,u)$.

Subtraktion der Gleichungen (4) für U und (ii) ergibt:

$$\int_{I_n} (\eta', \varphi)\, dt + (\eta_{n-1}^+)\varphi_{n-1}^+) = \int_{I_n} (f(t,u) - f(t,U), \varphi)\, dt + (\eta_{n-1}^-, \varphi_{n-1}^+) \qquad (i).$$

Wählt man $\varphi := \eta$ erhält man:

$$\int_{I_n} (\eta', \eta)\, dt + \|\eta_{n-1}^+\| = \int_{I_n} (f(t,u) - f(t,U), \eta)\, dt + (\eta_{n-1}^-, \eta_{n-1}^+).$$

Mit $(\eta', \eta) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\eta\|^2$, Integration über I_n, Beachtung der L-Stetigkeit von f, der Abschätzung $(a,b) \leq \|a\|\,\|b\|$ für das euklidische Skalarprodukt und der Ungleichung $ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$ ergibt sich:

$$\frac{1}{2}\|\eta_n^-\| - \frac{1}{2}\|\eta_{n-1}^+\| + \|\eta_{n-1}^+\| = L \int_{I_n} \|e\|\|\eta\|\, dt + \frac{1}{2}\|\eta_{n-1}^-\|^2 + \frac{1}{2}\|\eta_{n-1}^+\|^2$$

und damit

$$\|\eta_n^-\| \leq 2L \int_{I_n} \|e\|\|\eta\|\, dt + \frac{1}{2}\|\eta_{n-1}^-\|^2$$

Nach rekursiver Anwendung:

$$\|\eta_n^-\| \leq 2L \sum_{\nu=1}^{n} \int_{I_\nu} \|e\|\|\eta\|\, dt \qquad (iii)$$

unter Beachtung von $\|\eta_0^-\| = \|\bar{U}(t_0) - U(t_0)\| = \|u(t_0) - u(t_0)\| = 0$.

Abschätzung von $\|\eta'\|^2(t-t_{n-1})\,dt$:
Wir setzen $\varphi := \eta'(t - t_{n-1} \in P_{r-1}(I_{n-1})$ in (ii) ein:

$$\begin{aligned}
\int_{I_n} \|\eta'\|^2(t-t_{n-1})\,dt &= \int_{I_n} (f(t,u) - f(t,U), \eta')(t-t_{n-1})\,dt \\
&\leq L \int_{I_n} \|e\|\|\eta'\|(t-t_{n-1})\,dt \\
&\leq L \left(\int_{I_n} \|e\|^2(t-t_{n-1})\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{I_n} \|\eta'\|^2(t-t_{n-1})\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
\Longrightarrow \int_{I_n} \|\eta'\|^2(t-t_{n-1})\,dt &\leq L^2 \left(\int_{I_n} \|e\|^2(t-t_{n-1})\,dt\right)
\end{aligned}$$

Einsetzen der Abschätzungen $\|\eta_n^-\|^2$ und $\|\eta'\|^2(t-t_{n-1})\,dt$ in die Sobolevsche Ungleichung und Benutzen der Integralabschätzung $\int_{I_n} \|e\|^2(t-t_{n-1})\,dt \leq h_n \sup_{I_n} \|e\|^2$ ergibt:

$$\sup_{I_n} \|\eta\|^2 \leq \kappa^2 L^2 h_n \sup_{I_n} \|e\|^2 + 2\kappa^2 L \sum_{\nu=1}^{n} h_\nu \sup_{I_\nu} \|e\|\|\eta\| \qquad (iv).$$

zu 4.) Kombination von (i) und (iv) ergibt:

$$\begin{aligned}
\sup_{I_n} \|e\|^2 &= \sup_{I_n} \|\bar{e} + \eta\|^2 \leq \sup_{I_n} \|\bar{e}\|^2 + \sup_{I_n} \|\eta\|^2 + \sup_{I_n} \|\bar{e}\| \sup_{I_n} \|\eta\| \\
&\leq \sup_{I_n} \|\bar{e}\|^2 + \sup_{I_n} \|\eta\|^2 + \sup_{I_n} \|\bar{e}\|^2 + \sup_{I_n} \|\eta\|^2 \\
&= 2 \sup_{I_n} \|\bar{e}\|^2 + 2 \sup_{I_n} \|\eta\|^2 \\
&\leq 2 \left(c_I h_n^{r+1} \sup_{I_n} \|u^{r+1}\|\right)^2 + 2 \left(\kappa^2 L^2 h_n \sup_{I_n} \|e\|^2 + 2\kappa^2 L \sum_{\nu=1}^{n} h_\nu \sup_{I_\nu} \|e\|\|\eta\|\right) \\
&\leq 2 \left(c_I h_n^{r+1} \sup_{I_n} \|u^{r+1}\|\right)^2 + 2 \left(\kappa^2 L^2 h_n \sup_{I_n} \|e\|^2 + \kappa^2 L \sum_{\nu=1}^{n} h_\nu (\sup_{I_\nu} \|e\|^2 + \sup_{I_\nu} \|\eta\|^2)\right)
\end{aligned}$$

Mit $\eta = e - \bar{e} \Rightarrow \|\eta\|^2 \leq \|e\|^2 + \|\bar{e}\|^2 + 2\|e\|\|\bar{e}\| \leq 2\|e\|^2 + 2\|\bar{e}\|^2$:

$$
\begin{aligned}
\sup_{I_n} \|e\|^2 &\leq 2c_I^2 h_n^{2r+2} \sup_{I_n} \|u^{r+1}\|^2 + 2\kappa^2 L^2 h_n \sup_{I_n} \|e\|^2 \\
&+ 2\kappa^2 L \sum_{\nu=1}^{n} h_\nu (3 \sup_{I_\nu} \|e\|^2 + 2 \sup_{I_\nu} \|\bar{e}\|^2) \\
&\leq 2c_I^2 h_n^{2r+2} \sup_{I_n} \|u^{r+1}\|^2 + 2\kappa^2 L^2 h_n \sup_{I_n} \|e\|^2 \\
&+ 2\kappa^2 L \sum_{\nu=1}^{n} h_\nu 3 \sup_{I_\nu} \|e\|^2 + 4\kappa^2 L c_I^2 \sum_{\nu=1}^{n} h_\nu^{2r+3} \sup_{I_\nu} \|u^{(r+1)}\|^2 \\
&\leq 8\kappa^2 L \sum_{\nu=1}^{n} h_\nu \sup_{I_\nu} \|e\|^2 + 6\kappa^2 L c_I^2 \sum_{\nu=1}^{n} h_\nu^{2r+3} \sup_{I_\nu} \|u^{(r+1)}\|^2
\end{aligned}
$$

wobei o.B.d.A. $\kappa^2 L \geq 1$ und $Lh_n \leq 1$ angenommen wurde.
Wendet man auf

$$
\sup_{I_n} \|e\|^2 \leq \sigma 8\kappa^2 L \sum_{\nu=1}^{n-1} h_\nu \sup_{I_\nu} \|e\|^2 + 6\kappa^2 L c_I^2 \sum_{\nu=1}^{n} h_\nu^{2r+3} \sup_{I_\nu} \|u^{(r+1)}\|^2
$$

mit $\sigma = (1 - 8\kappa^2 L h_n)^{-1}$ das diskrete Gronwallsche Lemma an (unter der Voraussetzung $8\kappa^2 L h_n < 1$, woraus sich die Bedingung $\gamma_0 := 1/(5\kappa)^2 > h_n L$ ergibt), folgt:

$$
\sup_{I_n} \|e\|^2 \leq \exp\left(\sum_{\nu=1}^{n-1} \sigma 8\kappa^2 L h_\nu \right) 6\kappa^2 L c_I^2 \sum_{\nu=1}^{n} h_\nu^{2r+3} \sup_{I_\nu} \|u^{(r+1)}\|^2
$$

Das impliziert die behauptete Fehlerabschätzung:

$$
\sup_{I} \|e\| \leq K \max_{1 \leq n \leq N} \{h_n^{r+1} \sup_{I_n} \|u^{(r+1)}\|\}.
$$

$\square$

Ausschlaggebend für die a priori Fehlerabschätzung ist der Fehler $u - \bar{U}$ der Approximationsfunktion. Die Zuordnung der Approximationsfunktion und die Abschätzung des Fehlers, sind durch den Interpolationssatz gegeben.

Satz: Interpolationssatz
Einer Funktion $u \in C^{r+1}(\bar{I}_n)$ wird durch die Vorschrift

$$
\bar{U}_n^- = u(t_n), \qquad \int_{I_n} \bar{U} - u) q \, dt = 0 \quad \forall q \in P_{r-1}(I_n)^d,
$$

eindeutig eine Interpolierende $\bar{U} \in P_r(I_n)$ zugeordnet. Für diese gilt die Fehlerabschätzung

$$
\sup_{I_n}(\|u - \bar{U}\| \leq c_I h_n^{r+1} \sup_{I_n} \|u^{r+1}\|
$$

mit einer von h unabhängigen Interpolationskonstanten $c_I = c_I(r)$.

Beweis:
(i) Existenz und Eindeutigkeit von $\bar{U}$:

Auf dem Intervall I_n hat man ein LGS mit $r+1$ Gleichungen (einschließlich der Anfangsbedingung) zu $r+1$ Variablen. Es existiert eine eindeutige Lösung, da das zugehörige homogene LGS

$$p_n^- = 0, \quad \int_{I_n} pq\,dt = 0 \qquad \forall q \in P_{r-1}(I_n)^d \quad (*)$$

für $p \in P_r(I_n)$ nur die Nulllösung $p \equiv 0$ besitzt.
Das folgt z.B. aus folgender Argumentation:
Wir nehmen an, es gilt $p \not\equiv 0$.
Seien $\{\tau_i,\, i = 1, ..., m\}$ die ungeraden Nullstellen von p im Inneren von I_n. Dann gilt:

$$\int_{I_n} p(t) \prod_{i=1}^{m} (t-\tau_i)\,dt = \int_{I_n} \tilde{p}(t) \prod_{i=1}^{m+m^*} (t-\tau_i)^2\,dt > 0,$$

wobei rechts alle Nullstellen von p ausgeklammert wurden. Der erste Teil kann nur dann größer 0 sein, wenn $\prod_{i=1}^{m}(t-\tau_i)$ mindestens vom Grad r ist (sonst Widerspruch zu $(*)$). p hat also mindestens $r+1$ Nullstellen $\Rightarrow$ p ist Nullpolynom. Widerspruch zur Anahme.

(ii) Beweis der Abschätzung:
Mit dem gleichen Argument wie in (i) erhält man, dass $\bar{e}(t) = u(t) - \bar{U}(t) \in C^{r+1}(I_n)$ in I_n mindestens $r+1$ Nullstellen besitzt:

$$\int_{I_n} \bar{e}(t) \prod_{i=1}^{m} (t-\tau_i)\,dt = \int_{I_n} \tilde{\bar{e}}(t) \prod_{i=1}^{m+m^*} (t-\tau_i)^2\,dt > 0$$

$\Rightarrow\ m \geq r$. Mit $\bar{U}_n^- = u(t_n)$ folgt $m \geq r+1$, d.h. die Fehlerfunktion $\bar{e}$ hat auf I_n mindestens $r+1$ Nullstellen.
Betrachtet man nun das Nullpolynom $p \equiv 0$ als Polynom-Interpolierende in $P_r(I_n)$ von $\bar{e}$ in diesen Punkten, erhält man aus der Fehlerabschätzung der Polynominterpolation (unter Beachtung von $\bar{U}^{(r+1)} = 0$):

$$\bar{e}(t) - p(t) = \frac{\bar{e}^{(r+1)}(\xi)}{(r+1)!} \prod_{i=0}^{r} (t-\tau_i^r) = \frac{u^{(r+1)}(\xi)}{(r+1)!} \prod_{i=0}^{r} (t-\tau_i^r)$$

für ein $\xi \in I_n$ die gesuchte Abschätzung von $u - \bar{U}$:

$$\sup_{I_n} \|\bar{e}\| \leq \frac{1}{(r+1)!} h_n^{r+1} \sup_{I_n} \|u^{(r+1)}\|.$$

$\square$

Quellen:

[1] Rannacher, Rolf: Numerik I Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen
[2] Evans, Laurence: Partial Differential Equations