Extrapolationsverfahren

Vortrag im Rahmen des Seminars

Numerik gewöhnlicher Differentialgleichungen

unter der Leitung von Prof. Peter Bastian

WS 2010/11

Marlene Beczalla

21.12.2010

1. Beschreibung des Extrapolationsverfahrens und Beispiele

Erinnerung an **Extrapolation in Numerik 0**:

Ein numerischer Prozess liefere für alle Werte eines Parameters $h \in \mathbb{R}$ für $h > 0$ einen Wert $a(h)$.

Gesucht: $a(0) = \lim_{h \to 0} a(h)$

Also: Zu $h_1 > h_2 > ... > h_m > 0$ bestimmt man ein Interpolationspolynom P vom Grad m,

sodass $P(h_i) = a(h_i), i = 1, 2, ...$ und berechnet $a(0) \approx P(0)$.

Übertragung auf **Numerik 1**:

Definition: Sei ein *Anfangswertproblem* für n gewöhnliche Differentialgleichungen gegeben:

$y' = f(y), y(0) = y_0$; y ist die Lösung des AWP. (1.1.)

Definition: Man definiert ein *Einschrittverfahren* zur numerischen Lösung von (1.1.) wie folgt:

$$\eta_{k+1} = \eta_k + h\Phi(\eta_k, \eta_{k+1}, h); \quad \eta_0 := y_0$$

wobei Φ Verfahrensfunktion und *h* Schrittweite.

Dann ist der **Extrapolationsansatz**:

- zu einer gegebenen Grundschrittweite H und einer ganzzahligen Folge $F := \{n_i\}$ definiert

  man Schrittweiten $h_i := \frac{H}{n_i}$, $i = 1, 2, ...$

  (wiederholtes Verringern der Schrittweiten für Diskretisierung → man erhält eine Folge von Approximationen $\{\eta(H; h_i)\}$)

- Sei nun *A(h)* ein numerisches Verfahren (*h>0* Schrittweite).

  Dann nimmt man an, dass *A(h)* eine *asymptotische Entwicklung* in *h* der Form

  $$A(h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \ldots + a_{m-1} h^{m-1} + O(h^m)$$

  besitzt.

  (Beweis später exemplarisch für ein Verfahren.)

- Auswertung von *A* für die Schrittweiten $h_1 > h_2 > \ldots > h_m > 0$

  → - *Interpolation*: Bilden von Interpolationspolynom *P*, sodass $A(h_i) = P(h_i)$, *i = 1, 2, ...*

  - *Extrapolation*: Auswertung an *h = 0*, also $P(0) \approx a_0$.

<u>Beispiel</u>: **Extrapolation des expliziten Eulers**

Expliziter Euler: $\eta_{k+1} = \eta_k + h f(\eta_k)$

zwei Schritte mit halber Schrittweite: $\eta_k + \frac{h}{2} f(\eta_k) + \frac{h}{2} f(\eta_k + \frac{h}{2} f(\eta_k))$

Extrapolation: - $A(h) = \eta_k + h f(\eta_k)$

$$A(\frac{h}{2}) = \eta_k + \frac{h}{2} f(\eta_k) + \frac{h}{2} f(\eta_k + \frac{h}{2} f(\eta_k))$$

- lineares Interpolationspolynom: $P(h) = P_0 + P_1 h$

  Interpolationsbedingungen: $P(h) = P_0 + P_1 h = A(h)$ (I)

  $P(\frac{h}{2}) = P_0 + P_1 \frac{h}{2}$ (II)

- $P(0) = P_0 = 2\mathrm{A}(\frac{h}{2}) - A(h)$ (wegen 2II - I)

$$= 2\eta_k + h f(\eta_k) + h f(\eta_k + \frac{h}{2} f(\eta_k)) - (\eta_k + h f(\eta_k))$$

$$= \eta_k + h f(\eta_k + \frac{h}{2} f(\eta_k))$$

(entspricht Runge-Kutta der Ordnung 2)

Im Fall einer asymptotischen Entwicklung der Form

$A(h) = a_0 + a_1 h^{\gamma_1} + a_2 h^{\gamma_2} + \ldots + a_{m-1} h^{\gamma_{m-1}} + O(h^{\gamma_m})$, wobei $\gamma > 0$,

gilt für die Interpolationspolynome T:

- falls $\gamma_j = \gamma j$: Extrapolation kann mit Aitken-Neville-Algorithmus berechnet werden:

Extrapolationsschema:

$$\begin{array}{ccc} T_{11} & & \\ T_{21} & T_{22} & \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

mit $T_{i1} := \eta(H; h_i)$, *i = 1, 2, ...* (erste Spalte)

und $T_{i,k} := T_{i,k-1} + \dfrac{T_{i,k-1} - T_{i-1,k-1}}{\dfrac{(n_i)^\gamma}{(n_{i-k+1})^\gamma} - 1}$ (1.2.)

- falls $\gamma_j \neq \gamma j$: (1.2.) ersetzen durch:

$$T_{i,k} := T_{i,k-1} + \frac{T_{i,k-1} - T_{i-1,k-1}}{\dfrac{(n_i)^{\gamma_i - \gamma_{i-1}}}{(n_{i-k+1})^{\gamma_i - \gamma_{i-1}}} - 1} \ , \quad \gamma_0 := 0$$

In diesem Fall wird meist aus ökonomischen Gründen nur ein Extrapolationsschritt durchgeführt.

Weitere Beispiele:

Steife Differentialgleichungen:

„Definition“: Eine Differentialgleichung heißt *steif*, falls die Fehlerausbreitung nicht durch einen Term mit Lipschitz-Konstante beschrieben werden kann.

Also: Für zwei Lösungen eines DGL-Systems gilt: $\|u(t)-v(t)\| \leqslant \|u(0)-v(0)\|$,

was Kontraktion unabhängig von der Lipschitz-Konstante L bedeutet.

Darstellung eines steifen Systems:
$$y' = f(y,z),\ y(0) = y_0$$
$$\epsilon z' = g(y,z),\ z(0) = z_0 \quad , \quad 0 < \epsilon \ll 1 \qquad (1.3.)(a)$$

linear:
$$a' = f_y(x)a + f_z(x)b + c(x,\epsilon)$$
$$\epsilon b' = g_y(x)a + g_z(x)b + d(x,\epsilon) \qquad (1.3.)(b)$$

Beispiel: **Impliziter Euler**

Impliziter Euler: $\eta_{k+1} = \eta_k + h f(\eta_{k+1})$

Sei das implizite Euler-Verfahren in der Form
$$y_n - y_{n-1} = h f(y_n, z_n)$$
$$\epsilon(z_n - z_{n-1}) = h g(y_n, z_n) \qquad n \geqslant 1 \qquad (1.4.)$$
gegeben.

Satz 1:

Angenommen, die Lösung *(y(x), z(x))* von (1.3.)(a) ist glatt.

Unter den Bedingungen $\|(I - (\frac{h}{\epsilon}) g_z(x))^{-1}\| = \|(I - \gamma g_z(x))^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1+\gamma}$, $\gamma \geqslant 1$, $0 \leqslant x \leqslant \tilde{x}$

und $\|a(x_2)\| + \|b(x_2)\| \leqslant Konst. * (\|a(x_1)\| + \|b(x_1)\|)$ für $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \tilde{x}$

besitzt (1.4.) für $\frac{h}{\epsilon} \geqslant 1$ eine asymptotische Entwicklung der Form:

$$y_n = y(x_n) + h a_1(x_n) + h^2 a_2(x_n) + \ldots + h^N a_N(x_n) + O(h^{N+1}) + h\epsilon^2 f_z(0) g_z(0)^{-1} \left(I - \frac{h}{\epsilon} g_z(0)\right)^{-n} \nu$$

$$+ O(h^2 \epsilon^2)$$

$$z_n = z(x_n) + h b_1(x_n) + h^2 b_2(x_n) + \ldots + h^N b_N(x_n) + O(h^{N+1}) + h\epsilon \left(I - \frac{h}{\epsilon} g_z(0)\right)^{-n} \nu + O(h\epsilon^2) \quad ,$$

wobei $x_n = n*h$, $a_i(x), b_i(x)$ glatt (d.h. Ihre Ableitungen sind bis zu einem gewissen Grad unabhängig von ϵ) und $a_i(0) = O(\epsilon^2), b_i(0) = O(\epsilon), i = 1, 2, \ldots$,

$$\nu = \frac{1}{2} g_z(0)^{-2} [g_y(0) y''(0) + g_z(0) z''(0)] + O(\epsilon) \quad .$$

Beweis:

1. Schritt:

Zunächst betrachtet man

$$\begin{aligned} \bar{y}_n &= y_n - h(a_1(x_n) + \alpha_n) \\ \bar{z}_n &= z_n - h(b_1(x_n) + \beta_n) \quad \text{mit} \quad a_1(0) + \alpha_0 = 0 \quad , \quad b_1(0) + \beta_0 = 0 \quad . \end{aligned} \tag{1.5.}$$

Die Folgen $\{\bar{y}_n\}, \{\bar{z}_n\}$ können betrachtet werden als numerische Lösung eines neuen Verfahrens

$$\begin{aligned} \bar{y}_n - \bar{y}_{n-1} &= h \bar{\Phi}_n(\bar{y}_n, \bar{z}_n, h) \\ \epsilon(\bar{z}_n - \bar{z}_{n-1}) &= h \bar{\Psi}_n(\bar{y}_n, \bar{z}_n, h) \end{aligned} \tag{1.6.}$$

mit Verfahrensfunktionen

$$\bar{\Phi}_n(y, z, h) = f(y + h(a_1(x_n) + \alpha_n), z + h(b_1(x_n) + \beta_n)) - a_1(x_n) - a_1(x_{n-1}) - (\alpha_n - \alpha_{n-1}) \quad \text{und}$$

$$\bar{\Psi}_n(y, z, h) = g(y + h(a_1(x_n) + \alpha_n), z + h(b_1(x_n) + \beta_n)) - \epsilon(b_1(x_n) - b_1(x_{n-1})) - \epsilon(\beta_n - \beta_{n-1}) \quad .$$

Ziel: glatte Funktionen $a_1(x), b_1(x)$ und Folgen $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ finden, sodass das neue Verfahren genauer ist; wobei: $a'_1(x) = f_y(x) a_1(x) + f_z(x) b_1(x) + \frac{1}{2} y''(x)$ und $\epsilon b'_1(x) = g_y(x) a_1(x) + g_z(x) b_1(x) + \epsilon \frac{1}{2} z''(x)$ und die Folgen $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ als Lösungen von

$$\begin{aligned} \alpha_n - \alpha_{n-1} &= h f_y(x_n) \alpha_n + h f_z(x_n) \beta_n \\ \epsilon(\beta_n - \beta_{n-1}) &= h g_y(x_n) \alpha_n + h g_z(x_n) \beta_n \end{aligned} \tag{1.7.}$$

betrachtet werden können.

Dann betrachtet man (1.7.) näher: Approximation mit konstanten Koeffizienten:

$$\hat{\alpha}_n-\hat{\alpha}_{n-1}=h\,f_y(0)\,\hat{\alpha}_n+h\,f_z(0)\,\hat{\beta}_n\,,\,\hat{\alpha}_0=\alpha_0 \quad , \quad \epsilon(\hat{\beta}_n-\hat{\beta}_{n-1})=h\,g_y(0)\,\hat{\alpha}_n+h\,g_z(0)\,\hat{\beta}_n\,,\,\hat{\beta}_0=\beta_0 \qquad (1.8.)$$

Im folgenden zeigt man: $\alpha_n=\hat{\alpha}_n+O(h\epsilon^2) \quad , \quad \beta_n=\hat{\beta}_n+O(\epsilon^2) \quad ,$ (1.9.)

indem man (1.8.) schreibt als: $\hat{\alpha}_n-\hat{\alpha}_{n-1}=h\,f_y(x_n)\,\hat{\alpha}_n+h\,f_z(x_n)\,\hat{\beta}_n+h^2\mu_n \quad ,$

$$\epsilon(\hat{\beta}_n-\hat{\beta}_{n-1})=h\,g_y(x_n)\,\hat{\alpha}_n+h\,g_z(x_n)\,\hat{\beta}_n+h^2\zeta_n \quad , \quad n\geqslant 1 \quad ,$$

wobei $\|\mu\|,\|\zeta\|\leqslant C\,n\left(1+\frac{h}{\epsilon}\right)^{-n}\epsilon$, wegen:

$$\hat{\beta}_n=\left(I-\frac{h}{\epsilon}g_z(0)+O(h)\right)^{-n}\beta_0=\left[\left(I-\frac{h}{\epsilon}g_z(0)\right)^{-n}+O(\epsilon)\right]\beta_0 \quad , \quad \hat{\alpha}_n=\epsilon\,A(\epsilon)\,\hat{\beta}_n$$, mit

$A(\epsilon)=f_z(0)\,g_z(0)^{-1}+O(\epsilon)$ (was die Lösung von (1.8.) ist, wenn man dies in der Form

$\begin{pmatrix}\hat{\alpha}_n\\ \hat{\beta}_n\end{pmatrix}=(I-h\,I_\epsilon^{-1}J)^{-1}\begin{pmatrix}\hat{\alpha}_{n-1}\\ \hat{\beta}_{n-1}\end{pmatrix}$ schreibt, mit $I_\epsilon=\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & \epsilon I\end{pmatrix}$, $J(x)=\begin{pmatrix}f_y(x) & f_z(x)\\ g_y(x) & g_z(x)\end{pmatrix}$ und

$J=J(0)$) und $\beta_0=-\epsilon\frac{1}{2}g_z(0)^{-2}[g_y(0)\,y''(0)+g_z(0)\,z''(0)]+O(\epsilon^2)$ (aus rekursiver

Berechnung der $\alpha_0^{0,}\beta_0^{0,}\alpha_0^{1,}\beta_0^{1,}\ldots$ in der von h unabhängigen Darstellung

$\alpha_0=\alpha_0(\epsilon)=\alpha_0^{\,0}+\alpha_0^{\,0}\epsilon+\alpha_0^{\,2}\epsilon^2+\ldots \quad , \quad \beta_0=\beta_0(\epsilon)=\beta_0^{\,0}+\beta_0^{\,0}\epsilon+\beta_0^{\,2}\epsilon^2+\ldots$) und der ersten

Bedingung in der Formulierung des Satzes.

Wegen $\frac{h}{\epsilon}\geqslant 1$, gilt $\|\mu_n\|,\|\zeta_n\|\leqslant\tilde{C}\frac{\epsilon^2}{h}\rho$ für $\frac{1}{2}\leqslant\rho\leqslant 1$.

Dann folgt (1.9.) aus dem zweiten Teil dieses Konvergenzlemmas (ohne Beweis):

Sei ein Einschrittverfahren $y_n-y_{n-1}=h\,\Phi_n(y_n,z_n,h)$

$$\epsilon(z_n-z_{n-1})=h\,\Psi_n(y_n,z_n,h) \quad , \qquad n\geqslant 1 \qquad (1.10.)$$

und die gestörte Version $\hat{y}_n-\hat{y}_{n-1}=h\,\Phi_n(\hat{y}_n,\hat{z}_n,h)+h^2\mu_n\,,\,\hat{y}_0=y_0$

$$\epsilon(\hat{z}_n-\hat{z}_{n-1})=h\,\Psi_n(\hat{y}_n,\hat{z}_n,h)+h^2\zeta_n\,,\,\hat{z}_0=z_0 \quad . \qquad (1.11.)$$

Seien die Inkrementfunktionen Φ_n und Ψ_n gleichmäßig Lipschitz-stetig und sei

$$\left\|\left(I-\gamma\frac{\partial\Psi_n}{\partial z}(y,z,0)\right)^{-1}\right\|\leqslant\frac{1}{1+\gamma} \quad \text{für} \quad \gamma\geqslant 1 \quad .$$

Dann erfüllt die Differenz der Lösungen von (1.10.) und (1.11.) die folgende Schätzung für

$n\,h \leqslant Konst.$ und $\frac{h}{\epsilon} \geqslant 1$:

1. Falls $\|\gamma_n\| \leqslant M, \|\zeta_n\| \leqslant M$, dann gilt für eine Konstante C $\|y_n - \hat{y}_n\| \leqslant C\,M\,h$,

$$\|z_n - \hat{z}_n\| \leqslant C\,M\,h \quad . \tag{1.12.}$$

2. Falls $\|\gamma_n\| \leqslant M\,\rho^n, \|\zeta_n\| \leqslant M\,\rho^n$ mit $(1+\frac{h}{\epsilon})^{-1} < \rho < 1$, dann gilt $\|y_n - \hat{y}_n\| \leqslant C\,M\,h^2$,

$$\|z_n - \hat{z}_n\| \leqslant C\,M\,h(h+\rho^n) \quad . \tag{1.13.}$$

Da der lokale Fehler von (1.6.) gleich $O(h^3)$ ist, folgt mit dem ersten Teil des eben genannten Konvergenzlemmas: $\bar{y}_n = y(x_n) + O(h^2), \bar{z}_n = z(x_n) + O(h^2)$.

Daraus ergibt sich zusammen mit (1.9.) die Behauptung für *N = 1*.

2.Schritt:

Sei $\breve{y}_n = \hat{y}_n - h^2(a_2(x_n) + \alpha_n^{\,2})$,

$\breve{z}_n = \hat{z}_n - h^2(b_2(x_n) + \beta_n^{\,2})$ numerische Lösung eines Einschrittverfahrens der Form (1.6.).

Der lokale Fehler ist $O(h^4)$, falls $a_2(x), b_2(x)$ glatte Lösungen einer Differentialgleichung (1.3.)(b) sind mit $c(x,\epsilon), d(x,\epsilon)$ gegeben durch

$$\begin{aligned} c &= -\frac{1}{6}y''' - \frac{1}{2}a_1'' + \frac{1}{2}f_{yy}a_1^{\,2} + f_{yz}a_1 b_1 + \frac{1}{2}f_{zz}b_1^{\,2} \quad , \\ d &= -\epsilon\frac{1}{6}z''' - \epsilon\frac{1}{2}b_1'' + \frac{1}{2}g_{yy}a_1^{\,2} + g_{yz}a_1 b_1 + \frac{1}{2}g_{zz}b_1^{\,2} \end{aligned} \tag{1.14.}$$

und die Folgen $\{\alpha_n^{\,2}\}, \{\beta_n^{\,2}\}$ einer Differentialgleichung (1.7.) genügen mit zusätzlichen Inhomogenitäten $h\,\gamma_n, h\,\delta_n$, wobei

$$\gamma_n = \frac{1}{2}f_{yy}(x_n)(2a_1(x_n) + \alpha_n^{\,1})\alpha_n^{\,1} + \frac{1}{2}f_{zz}(x_n)(2b_1(x_n) + \beta_n^{\,1})\beta_n^{\,1}$$

$$+ f_{yz}(x_n)(a_1(x_n)\beta_n^{\,1} + b_1(x_n)\alpha_n^{\,1} + \alpha_n^{\,1}\beta_n^{\,1})$$

(mit $\alpha_n^{\,1}, \beta_n^{\,1}$ gleich α_n, β_n aus dem ersten Schritt) und $\delta_n = \frac{1}{2}g_{yy}(x_n)(2a_1(x_n) + \alpha_n^{\,1})\alpha_n^{\,1} + \frac{1}{2}g_{zz}(x_n)(2b_1(x_n) + \beta_n^{\,1})\beta_n^{\,1}$

$$+ g_{yz}(x_n)(a_1(x_n)\beta_n^{\,1} + b_1(x_n)\alpha_n^{\,1} + \alpha_n^{\,1}\beta_n^{\,1}) \quad .$$

Da wegen (1.9.) gilt $\alpha_n{}^1 = O(\epsilon^2)$, $\beta_n{}^1 = O(\epsilon(1+\frac{h}{\epsilon})^{-n}) + O(\epsilon^2)$, (1.15.)

folgt mit (1.5.), dass $\gamma_n, \delta_n = O(\epsilon^2)$.

Wie im ersten Schritt betrachtet man Folgen $\{\hat{\alpha}_n{}^2\}, \{\hat{\beta}_n{}^2\}$, die (1.8.) genügen.

Unter der Bedingung $\alpha_0 = \epsilon A(\epsilon)\beta_0$ legt man α_0, β_0 so fest, dass die Lösung von (1.3.)(b) mit (1.14.) glatt ist. Da die Inhomogenität $d(0,\epsilon) = O(\epsilon)$ genügt, erhält man

$\beta_0{}^2 = O(\epsilon), \alpha_0{}^2 = O(\epsilon^2)$.

Aus dem obengenannten Konvergenzlemma folgt: $\alpha_n{}^2 = \hat{\alpha}_n{}^2 + O(\epsilon^2), \beta_n{}^2 = \hat{\beta}_n{}^2 + O(\epsilon^2)$, was (1.15.) liefert für $\{\alpha_n{}^2\}, \{\beta_n{}^2\}$.

Der erste Teil des Konvergenzlemmas liefert wiederum $\breve{y}_n = y(x_n) + O(h^3), \breve{z}_n = z(x_n) + O(h^3)$, was die Behauptung für *N = 2* ergibt.

<u>Weitere Schritte</u>:

Diese funktionieren analog zum zweiten Schritt und so folgt die Behauptung per Induktion.

$\square$

Die *Stabilitätsfunktion* des impliziten Eulers ist $R(z) = (1-z)^{-1}$

und es gilt: $|R(iy)| \leq 1, R(\infty) = 0$ $\rightarrow$ L-Stabilität

Die lineare Stabilitätstheorie (Testproblem $y' = \lambda y; z = \lambda h \in \mathbb{C}$) erzeugt ein

Extrapolationstableau mit rationalen Funktionen:

$$\begin{array}{ccc} R_{11}(z) & & \\ R_{21}(z) & R_{22}(z) & \\ R_{31}(z) & R_{32}(z) & R_{33}(z) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

und es gilt: $R_{ik}(z) \approx \frac{1}{z^{i-k+1}}$

$$R_{i1}(z)=(1-\frac{z}{i})^{-i}\approx\frac{1}{z^i}$$

und $R_{ik}(\infty)=0$ (erwünscht)

Implementation: zu lösen ist: $\eta_{k+1}-\eta_k-h\,f(\eta_{k+1})=0\,,k=1,2,...$

mit: vereinfachte Newton-Iteration: $(I-h\,A)\eta_{k+1}{}^{i+1}=\eta_k+h\,\bar{f}(\eta_{k+1}{}^i),i=0,1,...$

mit $A=f_y(y_0)$, $\eta_{k+1}{}^0:=\eta_k$, $\bar{f}(y):=y'-Ay$

(hierbei muss die Ableitung von *f* nicht in jedem Schritt berechnet werden, sondern wird ersetzt durch die Konstante A)

Nicht-steife Differentialgleichungen:

Hierzu findet sich oben bereits ein Beispiel, nämlich der *explizite Euler*.

Semi – implizite Verfahren:

implizite Diskretisierungsverfahren verlangen mehrere Iterationen pro Diskretisierungsschritt

→ semi – implizit: eine Iteration pro Diskretisierungsschritt

Beispiel:

Semi – implizites Euler -Verfahren: $\eta_{k+1}:=(I-h\,A)^{-1}(\eta_k+h\,\bar{f}(\eta_k))=\eta_k+h(I-h\,A)^{-1}f(\eta_k)$

2. Ordnungs- und Schrittweitenkontrolle

Zunächst gilt für den *Diskretisierungsfehler*: $\epsilon_{ik} := \|\tau_{ik} - y(H)\|$

Die gleichzeitige Ordnungs- und Schrittweitenkontrolle basiert auf dem *subdiagonalen Fehler – Kriterium*: $\bar{\epsilon}_{k+1,k} := \|\tau_{k+1,k} - \tau_{k+1,k+1}\| \leqslant eps$, (2.1.)

wobei *eps* vorgeschriebene Toleranz ist und $\bar{\epsilon}_{k+1,k}$ eine Schätzung von $\epsilon_{k+1,k}$ unter der Bedingung $\epsilon_{k+1,k+1} \ll \epsilon_{k+1,k}$.

Außerdem gilt: $\tau_{k+1,k+1} - \tau_{k+1,k} = T_{k+1,k} + \dfrac{T_{k+1,k} - T_{k,k}}{\dfrac{(n_{k+1})^\gamma}{(n_0)^\gamma} - 1} - \tau_{k+1,k} = \dfrac{T_{k+1,k} - T_{k,k}}{\dfrac{(n_{k+1})^\gamma}{(n_0)^\gamma} - 1}$

Schrittweitenschätzung:

Für festes k und Schrittweite H ist die optimale, auf (2.1.) basierende Schrittweite:

$H_k := H\left(\dfrac{eps}{\bar{\epsilon}_{k+1,k}}\right)^{\frac{1}{p_k}}$, wobei $p_k = \begin{cases} \gamma k + 1, \mathit{falls}\ a_k(0) = 0 \\ \gamma k,\ \mathit{falls}\ a_k(0) \neq 0 \end{cases}$.

Sei e_{k+1} die Anzahl der Funktionsauswertungen zur Berechnung von $\tau_{k+1,k+1}$.

Ordnungssteuerung:

Bestimme $\bar{k}$ in jedem Zeitschritt so, dass $\dfrac{e_{\bar{k}+1}}{H_{\bar{k}}} = \min_{1 \leqslant k \leqslant k_{max}} \dfrac{e_{k+1}}{H_k}$ (für ein gewisses k_{max}) und verwende $\tau_{\bar{k}+1,\bar{k}+1}$ im nächsten Schritt.

Literatur:

P. Deuflhard. Recent progress in extrapolation methods for ordinary differential equations. SIAM Review, 27(4):505–535, 1985.

E. Hairer and C. Lubich. Extrapolation at stiff differential equations. Numerische Mathematik, 52:377–400, 1988.

P. Deuflhard. Order and stepsize control in extrapolation methods. Numerische Mathematik, 41:399–422, 1983.