Kapitel 3

Diskretisierungsverfahren

3.1 Elliptische Differentialgleichung

Wir beschränken uns auf elliptische Randwertaufgaben.
Gesucht ist eine Funktion $u\,(x, y)$ in $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, welche die allgemeine partielle Differentialgleichung 2. Ordnung löst:

$$A \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + E \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + Fu = G \tag{3.1}$$

Die Koeffzienten $A, B, \ldots, G$ können stückweise stetige Funktionen von x und y sein. Die Gültigkeit der Differentialgleichung sei auf eine Grundgebiet Ω beschränkt. Ein Beispiel eines solchen Gebietes zeigt Abbildung 3.1. Der Gebietsrand wird mit Γ bezeichnet, zudem ist der äußere Normalenvektor n eingezeichnet.

Definition 3.1 (Typeinteilung) *Eine partielle Differentialgleichung 2. Ordnung mit $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ heißt in einem Gebiet Ω*

- *elliptisch, falls $AC - B^2 > 0$*

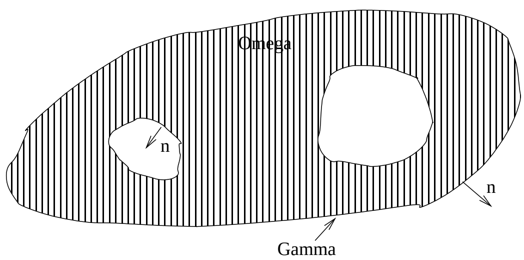

Abbildung 3.1: Grundgebiet Ω, Rand Γ

- *parabolisch, falls* $AC - B^2 = 0$
- *hyperbolisch, falls* $AC - B^2 < 0$

$\forall (x, y) \in \Omega$.

Sind A, B und C Koeffizientenfunktionen so ist die Einteilung einer Gleichung nicht immer eindeutig. Der Verlauf der Koeffizientenfunktionen bestimmt den Typ der Differentialgleichung, der Typ ist innerhalb von Ω eventuell nicht eindeutig bestimmt. Man spricht dann von Typenwechsel.

Beispiel 3.1 (Repräsentanten elliptischer Differentialgleichungen)

$$-\Delta u = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0 \qquad \textit{(Laplace-Gleichung)} \quad (1)$$

$$-\Delta u = f(x, y) \qquad \textit{(Poisson-Gleichung)} \quad (2)$$

$$-\Delta u + p(x, y)\, u = f(x, y) \qquad \textit{(Helmholtz-Gleichung)} \quad (3)$$

Randbedingungen für elliptische Differentialgleichungen:

$$u = \varphi \text{ auf } \Gamma_D \subset \partial\Omega \qquad \text{Dirichlet}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \gamma \text{ auf } \Gamma_N \subset \partial\Omega \qquad \text{Neumann}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha \cdot u = \beta \text{ auf } \Gamma_C \subset \partial\Omega \qquad \text{Cauchy}$$

φ, γ, α und β sind gegebene Funktionen, die i.d.R. über die Bogenlänge des Randes definiert werden.

Die Beispiele (1)-(3) treten bei Problemen des Elektromagnetismus, der Astronomie und der Strömungslehre auf. Die Lösung von (2) beschreibt die stationäre Temperaturverteilung in einem homogenen Medium.

Beispiel 3.2 (Akustik im Auto-Inneren) *Problem: In der Fahrgastzelle eines Autos können während des Fahrens unangenehme Geräusche auftreten, welche die Autohersteller minimieren wollen. Wir wollen die stehenden Wellen und die Eigenfrequenzen im Autoinneren berechnen.*

Sei $v = v(x_1, x_2, t)$ *die Druckdifferenz zu einem gewissen Normaldruck.* $|v|$ *ist dann die Lautstärke. Die zeitliche Entwicklung von* v *wird beschrieben durch die Wellengleichung (hyperbolisch):*

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \Delta v \quad \textit{in} \quad \Omega, \quad t > 0 \tag{3.2}$$

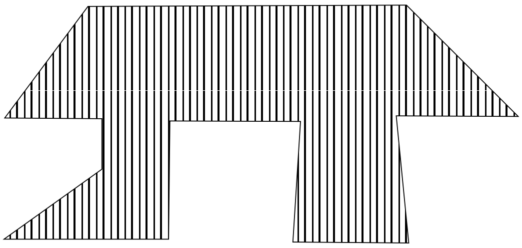

Abbildung 3.2: Gebiet Ω

Existieren Lösungen mit Frequenz $\omega \geq 0$, *so liefert der Ansatz:* $v(x_1, x_2, t) = e^{i\omega t} u(x_1, x_2)$ *in (3.2) eingesetzt mit* $\lambda := \omega^2 \geq 0$:

$$\begin{aligned} \Delta u + \lambda u &= 0 \quad \textit{in } \Omega \\ \nabla u \cdot \vec{n} &= 0 \quad \textit{auf } \partial\Omega \, (\Rightarrow \textit{kein Energieverlust; Wände akustisch hart}) \end{aligned} \tag{3.3}$$

(3.3) ist ein elliptisches Randwertproblem. Es ist nicht eindeutig lösbar:

1. *triviale Lösung:* $u = 0$ *in* Ω
2. $\exists \lambda > 0$ *mit* $Au = \lambda u$ $(A := -\Delta)$.
   Eigenwerte sind quadratische Eigenwertfrequenzen des Autoinnenraums.

Lösung in Form der Druckdifferenz u *zum Eigenwert* $\lambda = 2{,}5915$. *In Ohrnähe des Fahrers* $|u| \approx 0{,}02$, *auf dem Rücksitz* $|u| \approx 0{,}05 \Rightarrow$ *Frequenz* $\omega = \sqrt{\lambda}$ *wird am Rücksitz stärker wahrgenommen.*

3.2 Methode der Finiten Differenzen

Idee: Ersetze die Differentialquotienten durch Differenzenquotienten.
Sei $\Omega = (0,1)^2$ nach außen offen und seien $\forall i, j \in [0, N]$ $(x_i, y_i) \in \Omega$ äquidistante Stützstellen mit $h = x_{i+1} - x_i = y_{i+1} - y_i$.

Wir suchen Approximationen $u_{i,j}$ von $u(x_i, y_j)$. Diese Approximationen nennen wir diskrete Gitterfunktionen. Diese können dann mittels linearer Interpolation kontinuierlich fortgesetzt werden.
Taylorentwicklung um (x_i, y_j):

$$\begin{aligned} u(x_{i+1}, y_j) &= u(x_i, y_j) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) \cdot h + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) + O\left(h^3\right) \\ u(x_{i-1}, y_j) &= u(x_i, y_j) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) \cdot h + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) - O\left(h^3\right) \end{aligned}$$

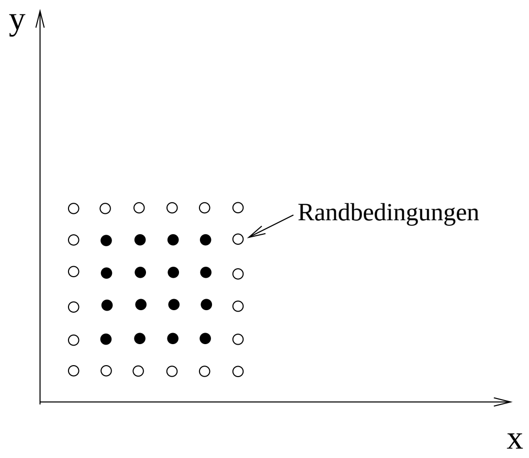

Abbildung 3.3: Gitterpunkte

Addition und Umformen führt auf:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) = \frac{1}{h^2}\left(u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j)\right) + O(h)$$

Analog für die y-Richtung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) = \frac{1}{h^2}\left(u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1})\right) + O(h)$$

Das ergibt die Finite-Differenzen-Approximation für den Laplace-Operator:

$$\Delta u(x_i, y_j) \approx \frac{1}{h^2}\left(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j}\right) \qquad \forall i, j \in [1, N-1] \subset \mathbb{N}.$$

Setzen wir $f_{ij} = f(x_i, y_j)$, müssen wir folgende Differenzengleichung lösen:

$$\begin{aligned} u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} &= h^2 f_{i,j} \quad \text{für } (x_i, y_j) \in \Omega \\ u_{i,j} &= 0 \text{ für } (x_i, y_j) \in \partial\Omega \end{aligned}$$

Der sogenannte Finite-Differenzen-Stern des Laplace in 2D:

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ 1 & -4 & 1 \\ & 1 & \end{array}$$

Wie sieht der FD-Stern in 3D aus? Wir können das Problem in Matrix-Schreibweise formulieren, indem wir die $u_{i,j}$ lexikographisch anordnen. Sei $u_k := u_{i,j}$, $f_k = f_{i,j}$ mit $k = i \cdot N + j$.

$$\Delta u = f \xrightarrow{\text{FD-Approximation}} A_h u_h = f_h \text{ mit der Systemmatrix}$$

$$A_h = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} A_0 & I & & \\ I & A_0 & I & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & I & A_0 \end{pmatrix}; A_0 = \begin{pmatrix} -4 & 1 & & & & \\ 1 & -4 & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & 1 & -4 & 1 \\ & & & & 1 & -4 \end{pmatrix} \text{ und } f_h = \begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f\left((N-1)^2\right) \end{pmatrix}$$

mit Einheitsmatrix $I \in \mathbb{R}^{(N-1)\times(N-1)}$

Bemerkung 3.1 *Die Matrix A_h hat nur wenige Nicht-Null-Elemente und heißt schwach besetzt. Solche Gleichungen kann man effizient lösen.*

Die klassische Analyse von Differentialgleichungen beruht auf den Begriffen Konsistenz und Stabilität.

Definition 3.2 (Konsistenz der Ordnung p) *Eine Diskretisierung heißt konsistent mit Ordnung p, falls gilt:*

$$|A_h u_h - f_h| \leq c_k\left(h^p\right), h \to 0$$

Definition 3.3 *Das diskrete Problem heißt stabil, falls:*

$$\begin{aligned} & |v_h| \leq c_s\,|A_h v_h| \ \textit{für alle Gitterfunktionen } v_h \\ \Leftrightarrow\ & \|A_h^{-1}\|_\infty \leq c_s \ \textit{Norm der Inversen von } A_h\ \forall h \end{aligned}$$

Es gibt eine Reihe von gebräuchlichen Normen, wir beschränken uns auf die Einführung der Zeilensummennorm und der Energienorm:

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \ \textit{Zeilensummennorm}$$

Ist eine Diskretisierung konsistent mit der Ordnung p und erfüllt sie das Stabilitätskriterium, so heißt sie konvergent mit der Ordnung p, d.h.

$$|u\left(x_i\right) - u_i| \leq ch^p\ \forall i \text{ (punktweise Konvergenz)}$$

Bemerkung 3.2

- *Die Konsitenzordnung der FD-Diskretisierung beträgt 2.*
- *Die Matrix A der FDM ist schwach diagonaldominant, d.h.*

$$|a_{kk}| - \sum_{j\neq k} |a_{kj}| \geq 0 \to \|A_h^{-1}\|_\infty \leq 1$$

Satz 3.1 *Das Finite-Differenzen-Verfahren auf einem beliebigen Gitter ist stabil und konvergent mit der Ordnung $p = 2$ für hinreichend glatte Lösungen $(u \in \mathcal{C}^2(\Omega))$.*

3.3 Methode der Finiten Elemente

Die Methode der Finiten Elemente vermeidet viele Nachteile der Finite-Differenzen-Methode. Sie ist komplizierter und man braucht theoretische Grundlagen, um FE-Verfahren zu entwerfen. Wir beschränken uns auf die Charakterisierung des Verfahrens.
Idee der FEM:
Gegeben: $\Delta u = f$ in Ω, $u = 0$ auf $\partial\Omega$.

$$\begin{aligned} f &= \Delta u \qquad (3.4) \\ \int\limits_{\Omega} f \cdot v dx &= \int\limits_{\Omega} \left(\nabla \cdot (\nabla u)\right) v dx, v \in \mathcal{C}^1\left(\overline{\Omega}\right), v = 0 \text{ auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

Nebenrechnung (partielle Integration):
Aus der Kettenregel

$$\begin{aligned} & \nabla\left(\nabla u \cdot v\right) = \left(\nabla \cdot (\nabla u)\right) v + (\nabla u)(\nabla v) \\ \iff \quad & \left(\nabla \cdot (\nabla u)\right) v = \nabla\left(\nabla u \cdot v\right) - (\nabla u)(\nabla v) \end{aligned}$$

folgt

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Omega} (\nabla \cdot \nabla u)\, v\, dx &= \int\limits_{\Omega} \nabla\left(\nabla u \cdot v\right)\, dx - \int\limits_{\Omega} (\nabla u)(\nabla v)\, dx \\ &\overset{\text{Satz von Gauß}}{=} \int\limits_{\partial\Omega} v \nabla u \cdot \vec{n} dx - \int\limits_{\Omega} \nabla u \nabla v dx. \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von $v = 0$ auf $\partial\Omega$ ergibt sich:

$$\int\limits_{\Omega} f \cdot v\, dx = -\int\limits_{\Omega} \nabla u \nabla v\, dx.$$

Damit ist das Ausgangsproblem (3.4) umformuliert. Wir suchen nun eine Funktion $u \in X$, sodass $\forall v \in X$ gilt:

$$\int\limits_{\Omega} \nabla u \nabla v dx = -\int\limits_{\Omega} f v dx, \qquad (3.5)$$

z.B. $X \subset \mathcal{C}_0^1\left(\overline{\Omega}\right)$.

Bemerkung 3.3 *Man bezeichnet (3.5) als die schwache Formulierung von (3.4), da wir nur einmal und nicht zweimal stetig differenzierbare Lösungen suchen.*

Wir suchen eine endlichdimensionale Approximation u_h von u, sodass

$$\int\limits_{\Omega} \nabla u_h \nabla v dx = -\int\limits_{\Omega} f v dx \ \forall v \in X_n \tag{3.6}$$

$X_n :=$ Folge endlichdimensionaler Räume mit $X_h \to X$ für $h \to 0$. Dies ist äquivalent zu einem linearen Gleichungssystem.
Sei $(\phi_1, \ldots, \phi_N)$ eine Basis von X_h.
$u_h = \sum\limits_{i=1}^{N} u_i \phi_i$ eingesetzt in (3.6) mit der Wahl $v = \phi_j$:

$$\sum_{i=1}^{N} u_i \int\limits_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j dx = -\int\limits_{\Omega} f \phi_j dx$$

Mit $A_{ij} = \int\limits_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j dx$, $F_j = -\int\limits_{\Omega} f \phi_j dx$ folgt:

$$\sum_{i=1}^{N} A_{ij} u_i = F_j, j = 1, \ldots, N \tag{3.7}$$

Bemerkung 3.4 *Wählt man die Basis $(\phi_1, \ldots, \phi_N)$ so, dass möglichst viele $A_{ij} = 0$ sind, ist (3.6) effizient lösbar.*

Offene Fragen:

1. Wie definiert man die Räume X und X_h?

2. Welche Basiselemente ϕ_i ergeben eine schwachbesetzte Matrix (A_{ij})?

Zu 1. Das ist sehr mathematisch und man braucht Aussagen der Funktionalanalysis. Vervollständigung von Banachräumen X in $\|\cdot\|_X$ führt zu Sobolev-Räumen H^1.

Zu 2. Eine Möglichkeit wäre $\phi_j(x) = \sin(j\pi x)$, $x \in \Omega = (-1, 1)$, $j = 1, \ldots, N$.

a). 1. $\int \nabla \phi_i \dot{\nabla} \phi_j dx = 0 \ \forall i \neq j$

2. (A_{ij}) diagonal
3. LGS leicht lösbar

Leider ist meist $\phi_j \neq 0$ auf $\partial\Omega \rightarrow \phi_j \notin X_h$

b). Alternative Idee:

- Für die Methode der Finiten Elemente wählen wir Basiselemente mit möglichst kleinem Träger $supp\phi_j := \{x \in \Omega : \phi_j(x) \neq 0\}$.
- Ω ist polygonal berandet, zerlege Ω in abgeschlossene Dreiecke, so dass $\overline{\Omega} = \bigcup\limits_{\tau \in T} \tau$, $T = \{$„Dreiecke $\in \Omega$“$\}$
- $\{b_i\}, i = 1, \ldots, N$ bezeichnet die Menge der Ecken der Dreiecke von Ω.

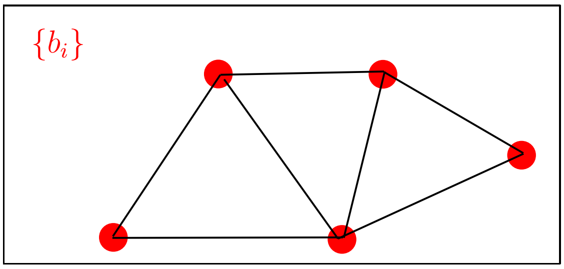

Abbildung 3.4: Dreiecksgitter

- Definiere $\phi_1, \ldots, \phi_n$ durch $\phi_j(b_i) = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, \ldots, N)$
- $\int\limits_{\Omega} \nabla\phi_i \cdot \nabla\phi_j dx \neq 0 \Leftrightarrow \exists\tau \in T : b_i \in \tau \wedge b_j \in \tau$

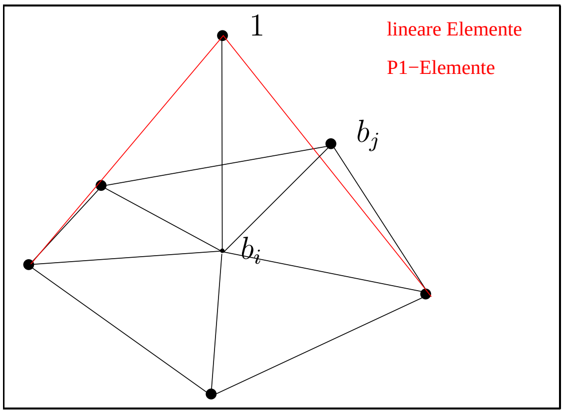

Abbildung 3.5: P1-Elemente